Решения
Заключительный тур олимпиады Росатом,
математика, 11 класс, комплект 2
2017-2018 учебный год

1. Для каждого допустимого a найти наименьшее решение уравнения $2\log_a^2 x+\log_a x^3-3=\log_x a^2$.

2. Найти наименьшую длину отрезка числовой оси, содержащего три различных решения уравнения $\cos 2x-\sin 2x-ctg2x\cdot\sin x+\sin x=0$.

3. Решить уравнение $\{2\sin x\}+[\cos 2x]=0$, где $[a]$ – целая часть числа a - наибольшее целое число не превосходящее a, $\{a\}$ – дробная часть числа a : $\{a\}=a-[a]$.

4. Робот может совершать равные по длине шаги по дорожке вперед и назад, при этом выбор направления движения каждого шага является случайным и равновозможным. Робот сделал 10 шагов и остановился. Найти вероятность того, что он окажется на расстоянии более двух шагов от начала движения.

5. При каких a уравнение $4\sin^2 x+4a\cos x-5a=0$ имеет решения на отрезке $\left[\frac{\pi}{3};\frac{\pi}{2}\right]$?

6. Плоскости P и Q, параллельные основанию правильной четырехугольной пирамиды $SABCD$, пересекают ребро SA пирамиды в точках M и N. Длины отрезков SM, SN и SA являются тремя последовательными членами геометрической прогрессии с знаменателем $q=3$. Найти двугранный угол при основании пирамиды, если известно, что в усеченную пирамиду с плоскостями оснований P и Q можно вписать шар.

Решения
Заключительный тур олимпиады Росатом,
математика, 11 класс, комплект 3
2017-2018 учебный год

1. Члены последовательности $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ удовлетворяют соотношению $a_{n+1}=2a_n+3,\ \ a_1=a$ для любых n и целом a. При каких a число 637 является членом последовательности?

2. Найти наибольшее значение функции $y=24\pi x/(9\pi^2+16x^2)$ на множестве решений уравнения $\sin x\cdot\cos 2x-2\cos^3 x+\cos 2x-\sin x+2\cos x=1$.

3. Найти натуральное число, делящееся на 225 и имеющее 15 различных делителей.

4. На окружности совершенно случайно взяты три точки A, B и C. Найти вероятность того, что треугольник ABC тупоугольный.

5. При каких a система $\begin{cases}\left(x^2+(y-7)^2-9\right)\left((x-4)^2+(y-3)^2-1\right)=0\\ ax-y-4a-2=0\end{cases}$ имеет четыре решения?

6. Плоскость P пересекает боковые ребра SA, SB, SC треугольной пирамиды $SABC$ в точках M, N, K соответственно и образует угол 45^0 с боковой гранью SBC. Найти объем пирамиды $SABC$, если произведение ее ребер $SA\cdot SB\cdot SC=5\sqrt{15}$, а пирамида $SMNK$ правильная.

Решения
Заключительный тур олимпиады Росатом,
математика, 11 класс, комплект 1
2017-2018 учебный год

1. Найти x, при которых числа $\log_2(6\sin x), \log_{2\cos x}(6\sin x)$ и $\log_{2\cos x} 4$ могут быть тремя последовательными членами геометрической прогрессии.

2. Найти решения $(x;y)$ системы $\begin{cases} \sin(2x+y)=-1 \\ \cos(x-y)=1 \end{cases}$ в прямоугольнике $-\pi \le x \le \pi/2, -\pi/2 \le y \le \pi/2$.

3. Отрезок $[A;B]$ длины 5 двигается на координатной плоскости так, что его концы лежат на параболе $y=2x^2$. Точка M - середина отрезка $[A;B]$. Найти минимально возможное значение расстояния точки M до оси абсцисс, а также абсциссу точки M, при которой оно достигается.

4. Код замка состоит из трех цифр от 0 до 9. Замок открывается, если сумма цифр кода делится на 3. Найти вероятность того, что случайно набранный код откроет замок.

5. При каких a система уравнений $\begin{cases} \left|\left|x\cos a+y\sin a-3/\sqrt{2}\right|+\left|y\cos a-x\sin a\right|=3/\sqrt{2} \\ \left|x-y\right|+\left|x+y\right|=8 \end{cases}$ имеет единственное решение?

6. В правильной четырехугольной пирамиде противоположные боковые грани перпендикулярны. Высота пирамиды равна h. Найти радиус шара, касающегося ребер основания и боковых ребер пирамиды или их продолжений.