Задания очного отборочного тура
Отраслевой физико-математической олимпиады школьников «Росатом»
Математика, 11 класс, комплект 2
2017 г.

1 Вариант
Максимальный балл за каждую задачу – 2 балла.

1. Найти все x, удовлетворяющие неравенству $n^2x^2-(2n^2+n)x+n^2+n-6\le 0$ при любых натуральных n.

Решение. Корнями квадратного трехчлена $n^2x^2-(2n^2+n)x+n^2+n-6$ являются

$$x_1=1-\frac{2}{n},\ x_2=1+\frac{3}{n}.$$

Разложим левую часть неравенства на множители

$$n^2\left(x-\left(1-\frac{2}{n}\right)\right)\left(x-\left(1+\frac{3}{n}\right)\right)\le 0.$$

Решая неравенство методом интервалов, получим $x\in\left[1-\frac{2}{n};1+\frac{3}{n}\right]$. Только $x=1$ принадлежит этому отрезку при любых n.

Ответ: $x=1$

2. Решить уравнение $\left(\cos\frac{2x}{5}-\cos\frac{2\pi}{15}\right)^2+\left(\sin\frac{2x}{3}-\sin\frac{4\pi}{9}\right)^2=0$.

Решение. Уравнение эквивалентно системе уравнений $\begin{cases}\cos\frac{2x}{5}-\cos\frac{2\pi}{15}=0\\ \sin\frac{2x}{3}-\sin\frac{4\pi}{9}=0\end{cases}$.

Решим уравнение $\cos\frac{2x}{5}=\cos\frac{2\pi}{15}$: $\left[\begin{array}{l}\frac{2x}{5}=\frac{2\pi}{15}+2\pi k,\to x_1=\frac{\pi}{3}+5\pi k,\ k\in Z\\ \frac{2x}{5}=-\frac{2\pi}{15}+2\pi k\to x_2=-\frac{\pi}{3}+5\pi n,\ n\in Z\end{array}\right.$.

Решим уравнение $\sin\frac{2x}{3}=\sin\frac{4\pi}{9}$: $\left[\begin{array}{l}\frac{2x}{3}=\frac{4\pi}{9}+2\pi m,\to x_3=\frac{2\pi}{3}+3\pi m,\ m\in Z\\ \frac{2x}{3}=\frac{5\pi}{9}+2\pi s\to x_4=\frac{5\pi}{6}+3\pi s,\ s\in Z\end{array}\right.$.

Решениями исходного уравнения могут быть пересечения серий $x_1\cap x_3,\ x_1\cap x_4,\ x_2\cap x_3,\ x_2\cap x_4$

Случай 1. Пересечение $x_1\cap x_3=\varnothing$. Действительно,

$$x_1=\frac{\pi}{3}+5\pi k=x_3=\frac{2\pi}{3}+3\pi m\to\frac{1}{3}=5k-3m.$$

Равенство невозможно, поскольку справа целое число.

Случай 2. Пересечение $x_1\cap x_4=\varnothing$.Действительно,

$$x_1=\frac{\pi}{3}+5\pi k=x_4=\frac{5\pi}{6}+3\pi s\to\frac{1}{2}=5k-3s.$$

Последнее равенство невозможно, поскольку k и s - целые числа.

Случай 3. Пересечение $x_2\cap x_3\ne\varnothing$. Действительно,

$$x_2=-\frac{\pi}{3}+5\pi n=x_3=\frac{2\pi}{3}+3\pi m\to 5n-3m=1\to\begin{cases} n=2+3t,\\ m=3+5t,\ t\in Z\end{cases}$$

Тогда $x=-\frac{\pi}{3}+5\pi(2+3t)=\frac{29\pi}{3}+15\pi t,\ t\in Z$

Случай 4. Пересечение $x_2\cap x_4=\varnothing$.Действительно,

$$x_2=-\frac{\pi}{3}+5\pi n=x_4=\frac{5\pi}{6}+3\pi s\to 5n-3s=\frac{7}{6},$$ что невозможно.

Ответ. $x=\frac{29\pi}{3}+15\pi t,\ t\in Z.$

3. Найти x и y, для которых $\begin{cases} x-2y+[x]+3\{x\}-\{y\}+3[y]=2,5\\ 2x+y-[x]+2\{x\}+3\{y\}-4[y]=12\end{cases}$, где $[x],[y]$ и $\{x\},\{y\}$ – целая и дробная части чисел x и y. Целая часть числа a это наибольшее целое число, не превосходящее a, а $\{a\}=a-[a]$.

Решение. С учетом того, что $x=[x]+\{x\}$ и $y=[y]+\{y\}$ запишем систему в виде:

$$\begin{cases} 2[x]+4\{x\}+[y]-3\{y\}=2,5\\ [x]+4\{x\}-3[y]+4\{y\}=12\end{cases}.$$

Введем обозначения: $\{x\}=u\in[0;1),\ \{y\}=v\in[0;1)$.

Система принимает вид: $\begin{cases} 2[x]+[y]=2,5-4u+3v\\ [x]-3[y]=12-4u-4v\end{cases}$.

Выразим $[x]$ и $[y]$ через u и v: $\begin{cases} [x]=\dfrac{19,5-16u+5v}{7}\\ [y]=\dfrac{-21,5+4u+11v}{7}\end{cases}$.

Оценим выражение $\frac{19,5-16u+5v}{7}$: $0,5=\frac{3,5}{7}<\frac{19,5-16u+5v}{7}<\frac{24,5}{7}=3,5.$

Таким образом, для $[x]$ допустимы только три значения $[x]=1;2;3$.

Случай 1. $[x]=1$. Имеем $\frac{19,5-16u+5v}{7}=1$. Отсюда получаем

$$16u-5v=12,5\to u=\frac{12,5+5v}{16}\in[0;1)\to v\in[-2,5;0,7)\to v\in[0;0,7).$$

Тогда $[y]=\frac{49v-73,5}{28}\in(-2,625;-1,4)$ для $v\in[0;0,7)$ и с условием целочисленности $[y]$ получаем $[y]=-2$. Этому значению соответствуют $v_1=\frac{5}{14},u_1=\frac{25}{28}$ и $x_1=1+\frac{25}{28}=\frac{53}{28},\ y_1=-2+\frac{5}{14}=-\frac{23}{14}$.

Случай 2. $[x]=2$. Имеем $\frac{19,5-16u+5v}{7}=2$. Отсюда получаем

$$16u-5v=5,5\to u=\frac{5v+5,5}{16}\in[0;1)\to v\in[-1,1;2,1)\to v\in[0;1).$$

Тогда $[y]=\frac{49v-80,5}{28}\in[-2,875;-1,125)$ для $v\in[0;1)$ и с условием целочисленности $[y]$ получаем $[y]=-2$. Этому значению соответствуют $v_2=0,5,\ u_2=0,5$ и $x_2=2+0,5=2,5,\ y_2-2+0,5=-1,5.$

Случай 3. $[x]=3$. Имеем $\frac{19,5-16u+5v}{7}=3$. Отсюда получаем

$$16u-5v=-1,5\to u=\frac{5v-1,5}{16}\in[0;1)\to v\in[0,3;3,5)\to v\in[0,3;1).$$

Тогда $[y]=\frac{49v-87,5}{28}\in[-2,6;-1,375)$ для $v\in[0;1)$ и с условием целочисленности $[y]$ получаем $[y]=-2$. Этому значению соответствуют $v_3=\frac{9}{14},u_3=\frac{3}{28}$ и $x_3=3+\frac{3}{28}=\frac{87}{28},\ y_3=-2+\frac{9}{14}=-\frac{19}{14}.$

Ответ: $\left(\frac{53}{28};-\frac{23}{14}\right);\left(\frac{5}{2};-\frac{3}{2}\right);\ \left(\frac{87}{28};-\frac{19}{14}\right).$

4. Найти вероятность того, что случайно взятое на отрезке $[0;5]$ число x является решением уравнения $\sin\left(x+|x-\pi|\right)+2\sin^2\left(x-|x|\right)=0$.

Решение.

Случай 1. $x\in[0;\pi]$. Уравнение принимает вид: $\sin\left(x+\pi-x\right)+2\sin^2\left(x-x\right)=0$,

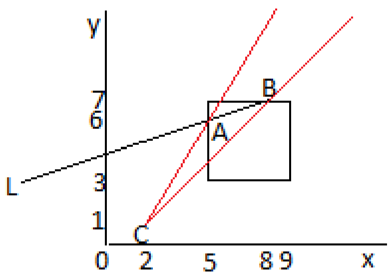
т.е. любое $x\in[0;\pi]$ является решением уравнения, следовательно, $P(A)=\frac{\pi}{5}$.

Случай 2, $x\in(\pi;5]$. Уравнение принимает вид: $\sin\left(x+x+\pi\right)+2\sin^2\left(x-x\right)=0$ или $\sin 2x=0$. Тогда $x=\frac{3\pi}{2}$ и ,следовательно, $P(A)=0$.

Ответ: $P(A)=\frac{\pi}{5}$.

5. При каких a система уравнений $\begin{cases}x\sin a-y\cos a=2\sin a-\cos a\\ x-3y+13=0\end{cases}$ имеет решение $(x;y)$ в квадрате $5\le x\le 9,3\le y\le 7$?

Решение. Прямая L ,задаваемая уравнением $x-3y+13=0$, пересекает стороны квадрата в точках $A(5;6)$ и $B(8;7)$.



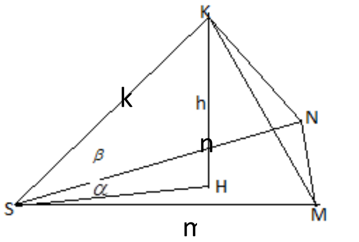
Первое уравнение системы запишем в виде $(x-2)\sin a-(y-1)\cos a=0$.

Прямая с таким уравнением проходит через точку $C(2;1)$ при любых a и пересекает отрезок $[A;B]$ при $a\in\left[\frac{\pi}{4}+\pi k,arctg\frac{5}{3}+\pi k\right],k\in Z$.

Ответ: $a \in \left[\frac{\pi}{4}+\pi k, arctg\frac{5}{3}+\pi k\right], k \in Z$.

6. На ребрах трехгранного угла с вершиной в точке S расположены точки M, N и K такие, что $SM^2+SN^2+SK^2 \le 12$. Найти площадь треугольника SMN, если известно, что угол MSN равен 30^0, а объем пирамиды $SMNK$ максимально возможный.

Решение. Введем обозначения: $SM=m, SN=n, SK=k$.



Объем пирамиды $SMNK$ равен

$$V=\frac{1}{3}S_{SMN}\cdot h=\frac{1}{6}mn\sin\alpha\cdot h=\frac{1}{6}mn\sin\alpha\cdot k\sin\beta=\frac{\sin\alpha\sin\beta}{6}mnk.$$

Значения углов α, β зависят от трехгранного угла, но не от положения точек M, N, K на его ребрах, поэтому максимальному объему пирамиды $SMNK$ соответствует максимальное значение произведение $m\cdot n\cdot k$, при условии $m^2+n^2+k^2 \le p$. Из неравенства о среднем геометрическом и среднем арифметическом трех чисел следует, что $\sqrt[3]{m^2n^2k^2} \le \frac{m^2+n^2+k^2}{3} \le \frac{p}{3}$.

Равенство достигается при $m=n=k$. Тогда при $m=n=k=\sqrt{\frac{p}{3}}$ объем пирамиды максимально возможный, а площадь треугольника SMN принимает значение $\frac{p\sin\alpha}{6}$. В нашем случае p=12, $\alpha=30^0$, следовательно, $S_{SMN}=1$.

Ответ: $S_{SMN}=1$.

Ответы для других вариантов.

2 вариант

Задача 1. Ответ: $x \in (-1;4)$.

Задача 2. Ответ: $x_1=\frac{19\pi}{2}+20\pi t,\ x_2=-\frac{11\pi}{2}+20\pi t, t \in Z.$

Задача 3. Ответ: $\left(\frac{3}{2};\frac{1}{2}\right)$.

Задача 4. Ответ: $P(A)=\frac{1}{4}$.

Задача 5. Ответ: $a \in \left[arctg\frac{4}{5}+\pi k, \frac{\pi}{4}+\pi k\right], k \in Z.$

Задача 6. Ответ: $S_{SMN}=4.$

3 вариант

Задача 1. Ответ: $x \in [1;2]$.

Задача 2. Ответ: $x = \frac{8\pi}{3} + 6\pi t,\ t \in Z$.

Задача 3. Ответ: $\left(\frac{5}{2}; -\frac{1}{2}\right)$.

Задача 4. Ответ: $P(A) = \frac{1}{2}$.

Задача 5. Ответ: $a \in \left[\frac{\pi}{4} + \pi k, arctg4 + \pi k\right], k \in Z$.

Задача 6. Ответ: $S_{SMN} = 2$.

4 вариант

Задача 1. Ответ: $x \in (-2;3)$.

Задача 2. Ответ: $x = \frac{25\pi}{4} + 21\pi t,\ t \in Z$.

Задача 3. Ответ: $\left(-\frac{45}{14}; -\frac{9}{14}\right); \left(-\frac{35}{14}; -\frac{1}{2}\right); \left(-\frac{25}{14}; -\frac{5}{14}\right)$.

Задача 4. Ответ: $P(A) = \frac{3}{8}$.

Задача 5. Ответ: $a \in \left[-arctg9 + \pi k, -arctg\frac{5}{3} + \pi k\right], k \in Z$.

Задача 6. Ответ: $S_{SMN} = 3$.

Задания очного отборочного тура
Отраслевой физико-математической олимпиады школьников «Росатом»
Математика, 11 класс, комплект 1
2017 г.

1 Вариант
Максимальный балл за каждую задачу – 2 балла.

1. Через $\{x\}$ и $[x]$ обозначены дробная и целая части числа x. Целая часть числа x – это наибольшее целое число, не превосходящее x, а $\{x\}=x-[x]$. Найти x, для которых $4x^2-5[x]+8\{x\}=19$.

Решение.
$$\begin{aligned}&x=[x]+\{x\}\to 4\left([x]+\{x\}\right)^2-5[x]+8\{x\}=19\to\\&4\{x\}^2+8\left([x]+1\right)\{x\}+4[x]^2-5[x]-19=0\end{aligned}\qquad(*)$$

Если x искомый, то квадратный трехчлен $f(t)=4t^2+8\left([x]+1\right)t+4[x]^2-5[x]-19$ имеет корни $t=\{x\}$ на отрезке $[0;1)$.

Случай 1. Один корень на $[0;1)$.

$$\begin{cases}f(0)=4[x]^2-5[x]-19\\ f(1)=4[x]^2+3[x]-7\neq 0\\ f(0)\cdot f(1)\le 0\end{cases}\to\begin{cases}\left([x]-t_1\right)\left([x]-t_2\right)\left([x]-1\right)\left(4[x]+7\right)\le 0\\ [x]\neq 1, t_1=\dfrac{-5-\sqrt{329}}{8}\approx -1,6, t_2=\dfrac{-5+\sqrt{329}}{8}\approx 2,9\end{cases}.$$

Решая неравенство методом интервалов, получим $[x]\in\left(-\dfrac{7}{4};t_1\right]\cup\left(1;t_2\right]$. С учетом целочисленности $[x]$, получим единственное возможное значение целой части числа x: $[x]=2$. Подставляем $[x]=2$ в (*) для определения $\{x\}$:

$$4t^2+24t-13=0\to\{x\}=\frac{1}{2},\{x\}\neq-\frac{13}{2}\to x=\frac{5}{2}.$$

Случай 2. Два корня на $[0;1)$. Необходимо, чтобы абсцисса вершины параболы $f(t)$ принадлежала $(0,1)$, т.е. $t_*=-[x]-1\in(0,1)\to[x]\in(-2;-1)$. Целых чисел на указанном интервале нет и случай 2 не реализуется.

Ответ: $x=\dfrac{5}{2}$.

2. Найти целые n, при которых выражение $\dfrac{1}{12}\left(8\sin\dfrac{\pi n}{10}-\sin\dfrac{3\pi n}{10}+4\cos\dfrac{\pi n}{5}+1\right)$ принимает целые значения.

Решение. Введем обозначение $t=\sin\dfrac{\pi n}{10}\in[-1;1]$ и перепишем исходное выражение:

$$\frac{1}{12}\left(8\sin\frac{\pi n}{10}-\sin\frac{3\pi n}{10}+4\cos\frac{\pi n}{5}+1\right)=\frac{1}{12}\left(8t-(3t-4t^3)+4(1-2t^2)+1\right)=$$
$$=\frac{1}{12}\left(4t^3-8t^2+5t+5\right)=f(t)$$

Проведем исследование функции $f(t)$ на отрезке $[-1;1]$. Найдем критические точки функции $f(t)$: $f'(t)=\frac{1}{12}(12t^2-16t+5)=0\rightarrow\left[\begin{array}{l}t_1=1/2\\ t_2=5/6\end{array}\right.$.

В точке $t=1/2$ функция $f(t)$ имеет локальный максимум, $f\left(\frac{1}{2}\right)=\frac{1}{2}$. В точке $t=\frac{5}{6}$ функция $f(t)$ имеет локальный минимум, $f\left(\frac{5}{6}\right)=\frac{65}{216}$. Найдем значение функции $f(t)$ на концах отрезка: $f(-1)=-1$, $f(1)=\frac{1}{2}$. В результате получаем область значений функции $E_f=\left[-1;\frac{1}{2}\right]$. Ей принадлежат два целых числа $y=-1$ и $y=0$.

Случай 1. $y=-1$. Это значение достигается при одном значении $t=-1$. Тогда $\sin\frac{\pi n}{10}=-1\rightarrow\frac{\pi n}{10}=-\frac{\pi}{2}+2\pi k\rightarrow n=20k-5,\ k\in Z.$

Случай 2. $y=0$. Решим уравнение $4t^3-8t^2+5t+5=0\rightarrow(2t+1)(2t^2-5t+5)=0.$ Таким образом,кубический многочлен имеет единственный корень $t=-\frac{1}{2}$. Тогда

$$\sin\frac{\pi n}{10}=-\frac{1}{2}\rightarrow\left[\begin{array}{l}\frac{\pi n}{10}=-\frac{\pi}{6}+2\pi k\rightarrow 3n-60k=-5\ \ (*)\\ \frac{\pi n}{10}=\frac{7\pi}{6}+2\pi k\rightarrow 3n-60k=7\ \ (**)\end{array}\right.$$

Уравнения (*) и (**) решений в целых числах не имеют, поскольку их левые части не делятся на 3.

Ответ: $n=20k-5,\ k\in Z.$

3. На плоскости расположены 8 прямых, из которых 3 параллельны, а любые две из оставшихся пяти – пересекаются. Рассматриваются все треугольники со сторонами, лежащими на данных прямых. Какое наибольшее и наименьшее число таких треугольников может быть обнаружено?

Решение. Введем обозначения: $P-$множество параллельных прямых, $p_k, k=1,2,...,m-$ любая прямая из P; $Q-$множество не параллельных прямых, $q_j,\ j=1,2,...,n-$ любая прямая из Q. Наибольшее возможное число треугольников связано с таким расположением прямых из Q, при котором ни какие три из них не проходят через одну точку (наибольшее количество вершин). Тогда число треугольников, не имеющих вершин на прямых из P равно C_m^3. Число треугольников, одна сторона которых лежит на прямой из P равно $n\cdot C_m^2$. Двух сторон треугольника, лежащих на двух прямых из P, не бывает по причине их параллельности. Таким образом,

$$N_{\max}=C_n^3+mC_n^2=\frac{n(n-1)(n-2)}{6}+m\frac{n(n-1)}{2}=\frac{n(n-1)}{6}(n+3m-2).$$

Наименьшее возможное число треугольников связано с таким расположением прямых из Q, при котором все прямые q_j проходят через одну точку A. Если A не принадлежит ни одной из прямых $p_k, k=1,2,...,m$, то число треугольников равно $N_1=mC_n^2$. Если $A\in p_k$, то число искомых треугольников равно $N_2=(m-1)C_n^2$. Таким образом,

$$N_{\min} = (m-1)C_n^2 = \frac{(m-1)n(n-1)}{2}.$$

В нашем случае $m=3, n=5,$ и, следовательно $N_{\max} = 40$, а $N_{\min} = 20.$

Ответ: $N_{\max} = 40$, $N_{\min} = 20.$

4. Случайная величина ξ равномерно распределена на отрезке $[0;6]$. Найти вероятность того, что неравенство $x^2 + (2\xi+1)x + 3 - \xi \le 0$ справедливо для всех $x \in [-2;-1]$.

Решение. Неравенство $f(x) = x^2 + (2\xi+1)x + 3 - \xi \le 0$ справедливо на отрезке $[-2;-1]$, если

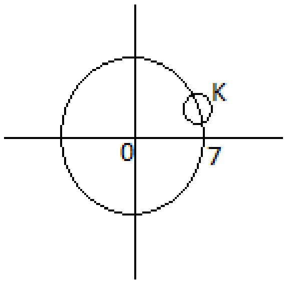
$$\begin{cases} f(-1) \le 0 \\ f(-2) \le 0 \end{cases} \to \begin{cases} 1-(2\xi+1)+3-\xi \le 0 \\ 1-2(2\xi+1)+3-\xi \le 0 \end{cases} \to \begin{cases} \xi \ge 1 \\ \xi \ge 2/5 \end{cases} \to \xi \ge 1.$$

Таким образом, событие A реализуется, если $\xi \in [1;6]$ и поэтому $P(A) = \frac{5}{6}.$

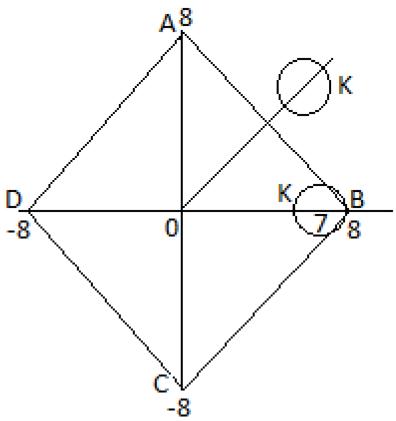
Ответ: $P(A) = \frac{5}{6}.$

5. При каких значениях a система $\begin{cases} (x - 7\cos a)^2 + (y - 7\sin a)^2 = 1 \\ |x| + |y| = 8 \end{cases}$ имеет единственное решение?

Решение. Множество точек на плоскости, координаты $(x;y)$ которых удовлетворяют первому уравнению системы, лежат на окружности K_a радиуса 1 с центром в точке $O(7\cos a; 7\sin a)$. При изменении a центр движется по окружности радиуса 7 с центром в начале координат.

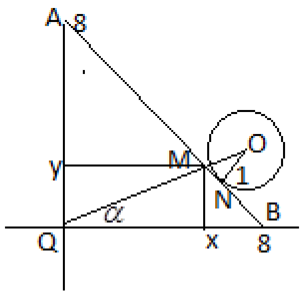


Множество точек на плоскости, координаты $(x;y)$ которых удовлетворяют второму уравнению системы, являются границей квадрата $ABCD$



При $a = 0$ точка B лежит на окружности K_0, а система имеет три решения. При $a \in (0; a_1)$, где значение $a = a_1$ соответствует касанию окружности K_a стороны BC квадрата, вершина B находится вне единичного круга, а система имеет 4 решения. При $a = a_1$ система имеет 3 решения. На интервале $a \in (a_1; a_2)$, где значение $a = a_2$ соответствует касанию окружности K_a стороны AB квадрата, система имеет два решения, соответствующие двум точкам пересечения окружности со стороной AB. При $a = a_2$ система имеет единственное решение. На интервале $a \in \left(a_2; \frac{\pi}{2} - a_2\right)$ окружность K_a находится вне квадрата, а система не имеет решений. При $a_3 = \frac{\pi}{2} - a_2$ система единственное решение. Тогда по симметрии фазового портрета относительно биссектрисы первого квадранта на интервале $\left(a_3; \frac{\pi}{2} - a_1\right)$ система будет иметь два решения, а при $a_4 = \frac{\pi}{2} - a_1$ - три решения. Наконец, при $a \in \left(a_4; \frac{\pi}{2}\right)$ система имеет 4 решения, а для $a = \frac{\pi}{2}$ - три решения. Можно заметить, что $T = \frac{\pi}{2}$ является периодом для решения задачи. Таким образом, решением задачи варианта 1 является серии $a = a_2 + \frac{\pi k}{2}, k \in Z$ и $a = \frac{\pi}{2} - a_2 + \frac{\pi k}{2}, k \in Z$, которые объединяются в серию $a = \pm a_2 + \frac{\pi k}{2}, k \in Z$.

Вычисление значения a_2:



$N-$ точка касания окружности с прямой AB, $M(x; y)-$ точка пересечения прямой QO с прямой AB.

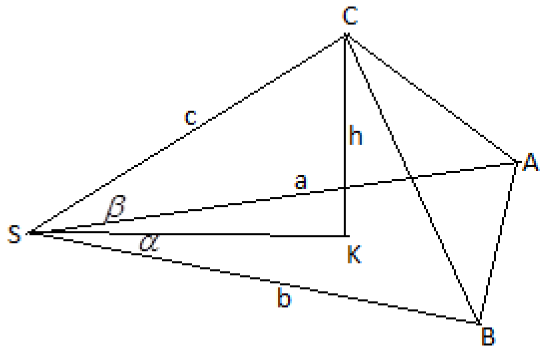
$$x = QM\cos a,\ y = QM\sin a \to x + y = 8 = QM(\sin a + \cos a) \to QM = \frac{4\sqrt{2}}{\sin\left(\frac{\pi}{4} + a\right)}$$

$a = a_2 = \arcsin\frac{4\sqrt{2}+1}{7} - \frac{\pi}{4}$. С учетом симметрии квадрата, система имеет единственное решение при $a = \pm\left(\arcsin\frac{4\sqrt{2}+1}{7} - \frac{\pi}{4}\right) + \frac{\pi k}{2} = \pm\arcsin\frac{4\sqrt{2}+1}{7} + \frac{(2k-1)\pi}{4}, k \in Z.$

Ответ: $a = \pm\arcsin\frac{4\sqrt{2}+1}{7} + \frac{(2k-1)\pi}{4}, k \in Z.$

6. В треугольной пирамиде $SABC$ угол ASB при вершине S равен 30^0, а боковое ребро SC наклонено к плоскости грани ASB под углом 45^0. Сумма длин боковых ребер пирамиды равна 9. Найти наибольшее возможное при этих условиях значение объема пирамиды.

Решение.



Введем обозначения: $SA=a, SB=b, SC=c, CK=h, \angle ASB=\alpha, \angle CSK=\beta,$
$CK-$ перпендикуляр на грань ASB. Тогда

$$V_{SABC}=\frac{1}{3}S_{SAB}\cdot h=\frac{1}{6}ab\sin\alpha\cdot c\sin\beta=\frac{1}{6}abc\sin\alpha\sin\beta.$$

Из неравенства о среднем геометрическом и среднем геометрическом

$$\sqrt[3]{abc}\le\frac{a+b+c}{3}=\frac{p}{3}\to abc\le\frac{p^3}{27}$$

Равенство достигается при $a=b=c$. Тогда наибольшее значение произведения abc равно $\frac{p^3}{27}$, а наибольшее значение объема пирамиды равно $\frac{p^3}{162}\sin\alpha\sin\beta=\frac{9\sqrt{2}}{8}$.

Ответ: $V_{\max}=\frac{9\sqrt{2}}{8}$.

Ответы для других вариантов.

2 вариант

Задача 1.Ответ: $x=2;4;5-\sqrt{13};5-\sqrt{17}$.

Задача 2. Ответ: 1) $n=12k$ 2) $n=12k\pm2, k\in Z$.

Задача 3. Ответ: 1) $N_{\max}=80$ 2) $N_{\min}=45$.

Задача 4. Ответ: $P(A)=\frac{3}{8}$.

Задача 5. Ответ: $a\in\left(\arcsin\frac{5\sqrt{2}-1}{9}-\frac{\pi}{4}+\frac{\pi k}{2};\frac{\pi}{4}-\arcsin\frac{5\sqrt{2}-1}{9}+\frac{\pi k}{2}\right), k\in Z$, $a\ne\frac{\pi n}{2}, n\in Z$.

Задача 6. Ответ: $V_{\max}=\frac{\sqrt{3}}{3}$.

3 вариант

Задача 1. Ответ: $x=\frac{3}{2};\frac{9-\sqrt{41}}{4}$.

Задача 2. Ответ: $n=18k,\quad k\in Z$.

Задача 3. Ответ: 1) $N_{\max}=77$ 2) $N_{\min}=21$.

Задача 4. Ответ: $P(A)=\frac{3}{7}$.

Задача 5. Ответ: $a=\pm\left(\arcsin\frac{9\sqrt{2}-2}{16}-\frac{\pi}{4}\right)+\frac{\pi k}{2}, a=\frac{\pi k}{2}, k\in Z$.

Задача 6. Ответ: $V_{\max} = \frac{8}{3}$.

4 вариант

Задача 1. Ответ: $x = \frac{1}{4}; \frac{-3-\sqrt{89}}{8}$.

Задача 2. Ответ: $n = 16k + 8,\ n = 16k,\ k \in Z$.

Задача 3. Ответ: 1) $N_{\max} = 140$ 2) $N_{\min} = 84$.

Задача 4. Ответ: $P(A) = \frac{3}{5}$.

Задача 5. Ответ: $a \in \left(\arcsin \frac{6\sqrt{2}+1}{11} - \frac{\pi}{4} + \frac{\pi k}{2}; \frac{3\pi}{4} - \arcsin \frac{6\sqrt{2}+1}{11} + \frac{\pi k}{2} \right), k \in Z$.

Задача 6. Ответ: $V_{\max} = \frac{\sqrt{6}}{24}$.