Решения
Заключительный тур олимпиады Росатом,
математика, 11 класс, комплект 2
2017-2018 учебный год

1. Для каждого допустимого a найти наименьшее решение уравнения $2\log_a^2 x + \log_a x^3 - 3 = \log_x a^2$.

2. Найти наименьшую длину отрезка числовой оси, содержащего три различных решения уравнения $\cos 2x - \sin 2x - ctg 2x \cdot \sin x + \sin x = 0$.

3. Решить уравнение $\{2\sin x\} + [\cos 2x] = 0$, где $[a]$ – целая часть числа a - наибольшее целое число не превосходящее a, $\{a\}$ – дробная часть числа a: $\{a\} = a - [a]$.

4. Робот может совершать равные по длине шаги по дорожке вперед и назад, при этом выбор направления движения каждого шага является случайным и равновозможным. Робот сделал 10 шагов и остановился. Найти вероятность того, что он окажется на расстоянии более двух шагов от начала движения.

5. При каких a уравнение $4\sin^2 x + 4a\cos x - 5a = 0$ имеет решения на отрезке $\left[\frac{\pi}{3}; \frac{\pi}{2}\right]$?

6. Плоскости P и Q, параллельные основанию правильной четырехугольной пирамиды $SABCD$, пересекают ребро SA пирамиды в точках M и N. Длины отрезков SM, SN и SA являются тремя последовательными членами геометрической прогрессии с знаменателем $q = 3$. Найти двугранный угол при основании пирамиды, если известно, что в усеченную пирамиду с плоскостями оснований P и Q можно вписать шар.

Решения

Вариант 1

Задача 1 Ответ: $x_{\min}(a)=\begin{cases} a,\ a\in(0;1) \\ \dfrac{1}{a^2},\ \ a\in(1;+\infty)\end{cases}$

Решение

Преобразование: $a>0, a\neq 1, x>0$

$$2\log_a^2 x+3\log_a x-3=\frac{2}{\log_a x}\to 2\log_a^3 x+3\log_a^2 x-3\log_a x-2=0$$

Замена $t=\log_a x$ приводит к кубическому уравнению $2t^3+3t^2-3t-2=0$, имеющему три корня $t_1=1, t_2=-2, t_3=-\dfrac{1}{2}$. Им соответствуют три решения: $x_1=a,\ x_2=\dfrac{1}{a^2},\ x_3=\dfrac{1}{\sqrt{a}}$

На интервале $a\in(0;1)$ справедливо неравенства $a<\dfrac{1}{\sqrt{a}}<\dfrac{1}{a^2}\to x_{\min}(a)=a$. Аналогично, на полуоси $a\in(1;+\infty)$ выполнено неравенство $\dfrac{1}{a^2}<\dfrac{1}{\sqrt{a}}<a\to x_{\min}(a)=\dfrac{1}{a^2}$

Задача 2 Ответ: $L=\dfrac{\pi}{2}$

Решение

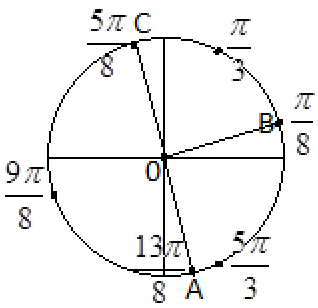
Преобразование:

$$\sin 2x\cdot(ctg 2x-1)-\sin x\cdot(ctg 2x-1)=0\to(ctg 2x-1)(\sin 2x-\sin x)=0\to$$
$$\sin x\cdot(2\cos x-1)\cdot(ctg 2x-1)=0$$

Множество решений уравнения:

$\sin x\neq 0$ (ОДЗ), $\left[\begin{array}{l} ctg 2x=1 \\ \cos x=\dfrac{1}{2}\end{array}\right.\to\left[\begin{array}{l} x=\dfrac{\pi}{8}+\dfrac{\pi}{2}k,\ k\in Z \\ x=\pm\dfrac{\pi}{3}+2\pi m,\ m\in Z\end{array}\right.$

Для удобства изобразим это множество на тригонометрическом круге



Наименьшая дуга секторов, содержащих три решения, соответствует сектору AOB или BOC. Каждый из этих секторов имеет угол $\dfrac{\pi}{2}$ и длину дуги окружности, на которую он опирается, равную так же $\dfrac{\pi}{2}$.

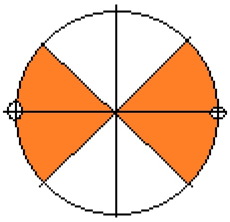
Задача 3 Ответ: $x=\pm\dfrac{\pi}{6}+\pi k, k\in Z$

Решение

Дробная часть числа a может быть целым числом только, если $\{a\}=0$. Тогда

$$\begin{cases}\{2\sin x\}=0 \\ [\cos 2x]=0\end{cases}\to\begin{cases}\sin x=\{0,\pm 1/2,\pm 1\} \\ 0\le\cos 2x<1\end{cases}$$

Решение неравенства изображено на рис.

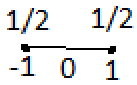


Решением системы является $\sin x = \pm\frac{1}{2} \to x = \pm\frac{\pi}{6} + \pi k, k \in Z$

Задача 4 Ответ: $P(A) = 1 - \frac{C_{10}^4 + C_{10}^5 + C_{10}^6}{2^{10}} = \frac{11}{32}$

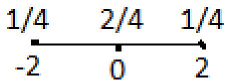
Решение

Если шагов всего один, то робот может остановиться в двух положениях, условно изображенных на рис

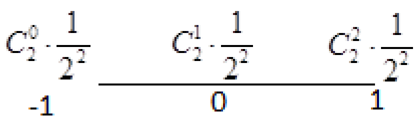


Здесь 0 – начало движения, -1 – шаг назад, 1 – шаг вперед. Вероятность попасть в положения -1 и 1 одинаковая и равна $\frac{1}{2}$.

Если шагов два, то существует три возможных положения робота в конце движения, условно обозначенных на рис



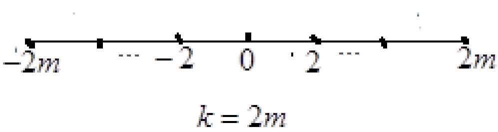
В положение -2 можно попасть из положения -1 после первого шага, совершив шаг назад. Таким образом, вероятность попадания в положение -2 за два шага равна $1/4 = C_2^0 \cdot \frac{1}{2^2}$. В положение 0 можно попасть из положений -1 и 1 после первого шага, совершив шаги вперед и назад соответственно. Тогда вероятность попадания в положение 0 после двух шагов равна $2 \cdot \frac{1}{4} = C_2^1 \cdot \frac{1}{2^2}$. В положение 2 после второго шага возможно попасть только из положения 1, делая один шаг вперед. Вероятность попадания в 2 за два шага равна $1/4 = C_2^2 \cdot \frac{1}{2^2}$.

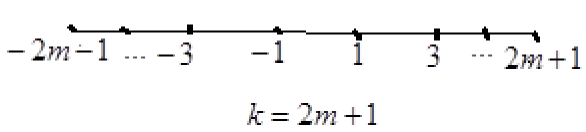


Далее образование коэффициентов при степенях $1/2$ определяется треугольником Паскаля.

Предположим, что робот сделал до остановки k шагов. Тогда существует $k+1$ возможных положений, в которых он может остановиться. Крайние из них находятся на расстоянии k шагов от начального положения движения. Расстояние между соседними положениями равно двум шагам.

На рис. изображены эти положения для четных и нечетных k.





Для $k = 2m$ вероятность остановки в положении 0 равна $C_k^m \cdot \frac{1}{2^k}$, в положении ± 2 (на расстоянии 2 шага от начала движения) эта вероятность равна $C_k^{m-1} \cdot \frac{1}{2^k}$, в положение ± 4 (на расстоянии 4 шага от начального положения) – $C_k^{m-2} \cdot \frac{1}{2^k}$ и т.д. в положении $\pm 2m$ эта вероятность равна $C_k^0 \cdot \frac{1}{2^k}$. В варианте 1 $m = 5$. Вероятность остановится в положении, отстоящем от начального не более двух шагов, равна $P(\bar{A}) = \frac{1}{2^{10}}\left(C_{10}^4 + C_{10}^5 + C_{10}^6\right) = \frac{21}{32}$, а вероятность противоположного события $P(A) = \frac{11}{32}$.

Для $k = 2m+1$ вероятность остановки в положении ± 1 равна $C_k^m \cdot \frac{1}{2^k}$, в положении ± 3 (на расстоянии 3 шага от начала движения) – $C_k^{m-1} \cdot \frac{1}{2^k}$, и т.д. остановка в положении $\pm(2m+1)$ происходит с вероятностью $C_k^0 \cdot \frac{1}{2^k}$.

Задача 5 Ответ: $a \in [0{,}8;1]$

Решение.

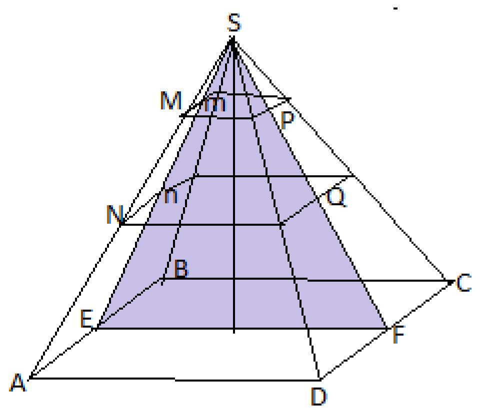
Искомые a принадлежат области значений функции $a = \frac{4\sin^2 x}{5 - 4\cos x} = \frac{4(1-\cos^2 x)}{5-4\cos x}$ на отрезке $\left[\frac{\pi}{3};\frac{\pi}{2}\right]$. Замена $t = \cos x$ приводит к задаче нахождения области значений функции $a = \frac{4(1-t^2)}{5-4t}$ на отрезке $\left[0;\frac{1}{2}\right]$.

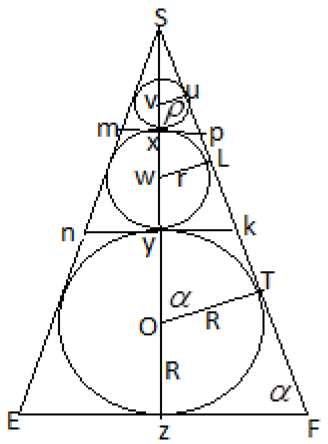
Исследование функции:

Производная $a' = 8\frac{(2t-1)(t-2)}{(5-4t)^2}$ неотрицательная на отрезке $\left[0;\frac{1}{2}\right]$, поэтому $a_{\min} = a(0) = \frac{4}{5}$, $a_{\max} = a(0{,}5) = 1$

Задача 6 Ответ: $\alpha = 60^0$

Решение. В пирамиде проведено осевое сечение, перпендикулярное стороне основания.





По условию $Sn = Sm \cdot q,\ SE = Sn \cdot q = Sm \cdot q^2$. Тогда $\triangle Smp \sim \triangle Snk$ с коэффициентом подобия q и $\triangle Smp \sim \triangle SEF$ с коэффициентом подобия q^2.

По условию, в усеченную пирамиду можно вписать шар, а значит, в трапецию $mnpk$ можно вписать окружность. Так как образом при преобразовании подобия с центром в точке S и коэффициентом подобия q отрезка mp является отрезок nk, а отрезок nk переходит в отрезок EF, то окружность радиуса r с центром в точке w переходит в окружность радиуса $R = r \cdot q$ с центром в точке O, вписанную в трапецию $EnkF$. Аналогично, окружность с центром в точке w является образом окружности радиуса ρ, вписанной в треугольник Smp.

Из подобия треугольников OTS и FzS имеем $(H-R)\cos\alpha = R \to R = \frac{H\cos\alpha}{1+\cos\alpha}$, где $H = Sz$.

Если $Sy = h$, то

$$h + 2R = H = hq \to h(q-1) = 2R = \frac{2H\cos\alpha}{1+\cos\alpha} = \frac{2hq\cos\alpha}{1+\cos\alpha} \to q\left(1 - \frac{2\cos\alpha}{1+\cos\alpha}\right) = 1 \to q = \frac{1+\cos\alpha}{1-\cos\alpha}$$

По условию, $q = 3 \to \frac{1+\cos\alpha}{1-\cos\alpha} = 3 \to \cos\alpha = \frac{1}{2} \to \alpha = 60^0$

Вариант 2

Задача 1 Ответ: $x_{\max}(a)=\begin{cases}\dfrac{1}{a},\ a\in(0;1)\\ a^2,\ \ a\in(1;+\infty)\end{cases}$

Задача 2 Ответ: $L=\dfrac{5\pi}{18}$

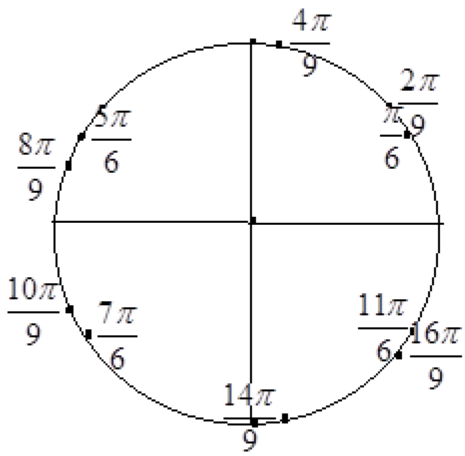
Решение

Преобразование:

$$2\cos 3x\cdot\left(3\sin^2 x-\cos^2 x\right)+4\sin^2 x-1=0\to 2\cos 3x\cdot\left(4\sin^2 x-1\right)+4\sin^2 x-1=0\to$$

$$\left(4\sin^2 x-1\right)\left(2\cos 3x+1\right)=0$$

Решения $\left[\begin{array}{l} x=\pm\dfrac{\pi}{6}+\pi k,\ \ k\in Z\\ x=\pm\dfrac{2\pi}{9}+\dfrac{2\pi m}{3},\ \ m\in Z\end{array}\right.$



Задача 3 Ответ: $x=(-1)^k\dfrac{\pi}{6}+\pi k, x=(-1)^k\dfrac{\pi}{3}+\pi k, x=\pi k, x=(-1)^k\dfrac{\pi}{4}+\pi k, k\in Z$

Задача 4 Ответ: $P(A)=\dfrac{C_9^3+C_9^4+C_9^5+C_9^6}{2^9}=\dfrac{105}{128}$

Задача 5 Ответ: $a\in\left[-1;-\dfrac{3}{7}\right]$

Вариант 3

Задача 1 Ответ: $x_{\min}(a)=\begin{cases}a^2,\ a\in(0;1)\\ \dfrac{1}{\sqrt{a}},\ \ a\in(1;+\infty)\end{cases}$

Задача 2 Ответ: $L=\dfrac{\pi}{3}$

Решение

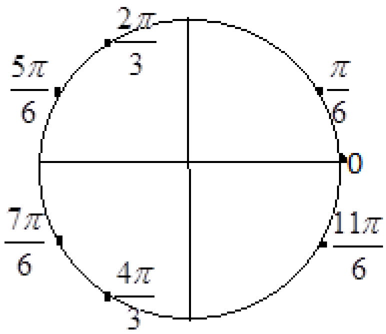
Преобразование:

$$4\sin^2 2x(\cos 3x+3\cos x)-3\left(\cos 3x+3\cos x\right)-(3cosx+1)(4\sin^2 2x-3)=0\to$$

$$(4\sin^2 2x-3)(\cos 3x+3\cos x)-(3cosx+1)(4\sin^2 2x-3)=0\to$$

$$(4\sin^2 2x-3)(\cos 3x-1)=0$$

Решения $\left[\begin{array}{l} x=\dfrac{2\pi k}{3}, k\in Z \\ x=\pm\dfrac{\pi}{6}+\pi m,\ m\in Z \end{array}\right.$



Задача 3 Ответ: $x=\dfrac{\pi k}{2}, x=-\dfrac{\pi}{3}+\pi k, k\in Z$

Задача 4 Ответ: $P(A)=\dfrac{C_8^4}{2^8}=\dfrac{35}{128}$

Задача 5 Ответ: $a\in\left[\dfrac{1}{6};\dfrac{1}{2}\right]$

Задача 6 Ответ: $V=\dfrac{a^3\sqrt{5}}{12}$

Вариант 4

Задача 1 Ответ: $x_{\min}(a)=\begin{cases}\dfrac{1}{a}, a\in(0;1)\\ a,\ \ a\in(1;+\infty)\end{cases}$

Задача 2 Ответ: $L=\dfrac{2\pi}{9}$

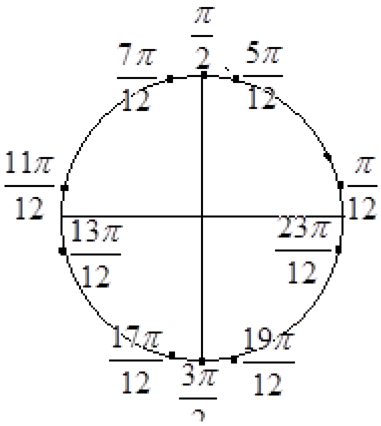
Решение

Преобразование:

$$\cos 2x\left(4\sin^2 3x-1\right)-2\cos 6x+1=0\rightarrow\cos 2x\left(4\sin^2 3x-1\right)-2\left(1-2\sin^2 x\right)+1=0\rightarrow$$

$$\cos 2x\left(4\sin^2 3x-1\right)+\left(4\sin^2 3x-1\right)=0\rightarrow\left(4\sin^2 3x-1\right)\left(\cos 2x+1\right)=0$$

Решения $\left[\begin{array}{l} x=\pm\dfrac{\pi}{12}+\dfrac{\pi k}{3}, k\in Z \\ x=\dfrac{\pi}{2}+\pi n,\ n\in Z \end{array}\right.$



Задача 3 Ответ: $x=\pm\frac{11\pi}{12}+2\pi k, x=\pm\frac{7\pi}{12}+2\pi k, \mathrm{x}=\pm\frac{\pi}{4}+2\pi k, x=\frac{\pi}{2}+\pi k, k\in Z$

Задача 4 Ответ: Ответ: $P(A)=1-\frac{2C_7^3+2C_7^2}{2^7}=\frac{1}{8}$

Задача 5 Ответ: $a\in\left[\frac{1}{6};\frac{2}{3}\right]$

Задача 6 Ответ: $S_{бок}=\frac{7a^2}{5}$

Решения
Заключительный тур олимпиады Росатом,
математика, 11 класс, комплект 3
2017-2018 учебный год

1. Члены последовательности $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ удовлетворяют соотношению $a_{n+1} = 2a_n + 3,\ \ a_1 = a$ для любых n и целом a. При каких a число 637 является членом последовательности?

2. Найти наибольшее значение функции $y = 24\pi x/(9\pi^2 + 16x^2)$ на множестве решений уравнения $\sin x \cdot \cos 2x - 2\cos^3 x + \cos 2x - \sin x + 2\cos x = 1$.

3. Найти натуральное число, делящееся на 225 и имеющее 15 различных делителей.

4. На окружности совершенно случайно взяты три точки A, B и C. Найти вероятность того, что треугольник ABC тупоугольный.

5. При каких a система $\begin{cases} \left(x^2 + (y-7)^2 - 9\right)\left((x-4)^2 + (y-3)^2 - 1\right) = 0 \\ ax - y - 4a - 2 = 0 \end{cases}$ имеет четыре решения?

6. Плоскость P пересекает боковые ребра SA, SB, SC треугольной пирамиды $SABC$ в точках M, N, K соответственно и образует угол 45^0 с боковой гранью SBC. Найти объем пирамиды $SABC$, если произведение ее ребер $SA \cdot SB \cdot SC = 5\sqrt{15}$, а пирамида $SMNK$ правильная.

Решения

Вариант 1

Задача 1 Ответ: $a=5\cdot 2^{8-n}-3$ для $n=1,2,\ldots 8$

Решение

Найдем общий член последовательности:

$$a_2=2\cdot a+3\to a_3=2(2\cdot a+3)+3=2^2\cdot a+2\cdot 3+3\to a_4=2(2^2\cdot a+2\cdot 3+3)+3=2^3\cdot a+3(2^2+1)$$

$$a_n=2^{n-1}\cdot a+3(2^{n-2}+2^{n-1}+\ldots+1)=2^{n-1}\cdot a+3(2^{n-1}-1)=(a+3)\cdot 2^{n-1}-3$$

Нужно найти целые a и n, при которых $a_n=637$:

$$(a+3)\cdot 2^{n-1}-3=637\to(a+3)\cdot 2^{n-1}=640=5\cdot 2^7\to a+3=5\cdot 2^{8-n}$$

Число $a+3$ может быть целым для $n=1,2,\ldots 8$, т.е. существует восемь таких значений $a=5\cdot 2^{8-n}-3$ для $n=1,2,\ldots 8$.

Задача 2 Ответ: $y_{\max}=\dfrac{24}{25}=0,96$

Решение

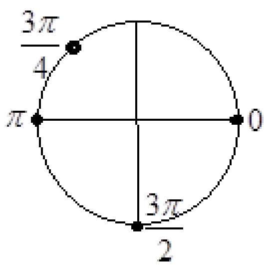
Преобразование:

$$-\sin x\cdot(1-\cos 2x)+\cos x\cdot(2-2\cos^2 x)-(1-\cos 2x)=0$$

$$-\sin x\cdot(1-\cos 2x)+\cos x\cdot(1-\cos 2x)-(1-\cos 2x)=0\to(1-\cos 2x)(\cos x-\sin x-1)=0$$

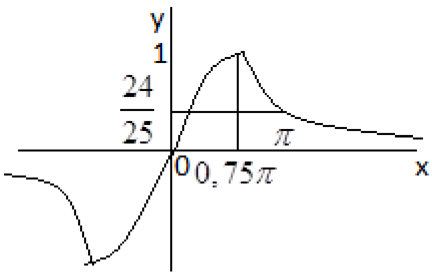
Множество решений:

$$\left[\begin{array}{c}\cos 2x=1\\ \cos x-\sin x=\sqrt{2}\cos\left(x+\dfrac{\pi}{4}\right)=1\end{array}\right.\to\left[\begin{array}{c}x=\pi k\\ \cos\left(x+\dfrac{\pi}{4}\right)=\cos\dfrac{\pi}{4}\end{array}\right.\to\left[\begin{array}{l}x=\pi k\\ x=2\pi m\\ x=-\dfrac{\pi}{2}+2\pi n\end{array}\right.,n,m,k\in Z$$



Наибольшее значение функции

$$y=24\pi x/(9\pi^2+16x^2)\to y'=24\pi\cdot\frac{9\pi^2-16x^2}{(9\pi^2+16x^2)^2}=0\to x_{\max}=\frac{3\pi}{4},y_{\max}=1,x_{\min}=-\frac{3\pi}{4},y_{\min}=-1$$



Ближайшими к $x_{\max}=\dfrac{3\pi}{4}$ решениями уравнения являются $x=0$ и $x=\pi$, причем на них достигается наибольшее значение функции $y(x)$, $y(0)=0,\ y(\pi)=\dfrac{24}{25}$

Задача 3 Ответ: 5625, 2025

Решение

Заметим, что число a с разложением на простые делители вида $a=p_1^{s_1}\cdot p_2^{s_2}\cdot\ldots\cdot p_k^{s_k}$ имеет $(s_1+1)(s_2+1)\cdot\ldots\cdot(s_k+1)$ различных делителей. Если a делится на 225, то $a=3^{s_1}\cdot 5^{s_2}\cdot b$, причем $s_1\geq 2$ и $s_2\geq 2$. Если $b>1$, то оно имеет по крайней мере один простой делитель p: $p\neq 3,\ p\neq 5$. Тогда общее число различных делителей числа a не меньше

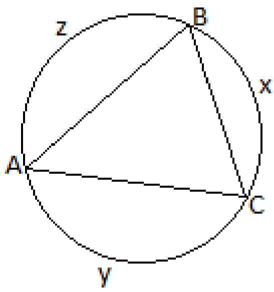
$(s_1+1)(s_2+1)\cdot 2\geq 3\cdot 3\cdot 2=18>15$, что противоречит условию. Отсюда следует, что $b=1$ и общее число делителей числа a равно $(s_1+1)(s_2+1)=15$. Последнее возможно в двух случаях:

1. $s_1=2,\ s_2=4\to a_1=3^2\cdot 5^4=5625$ 2. $s_1=4,\ s_2=2\to a_2=3^4\cdot 5^2=2025$

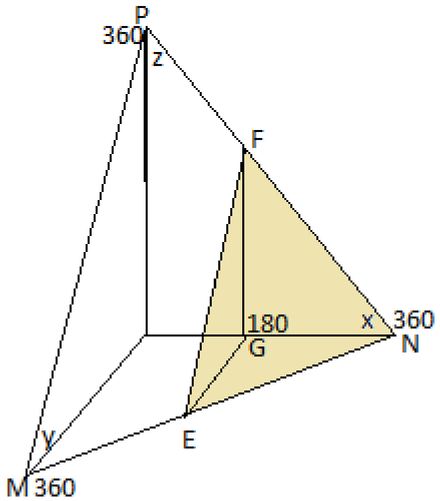
Задача 4 Ответ: $P(A)=\dfrac{3}{4}$

Решение

Обозначения: $x, y, z-$величины (в градусах) дуг окружности, на которые опираются углы при вершинах A, B, C треугольника.



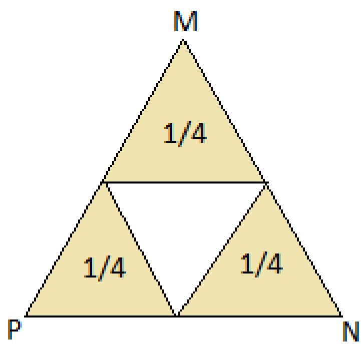
По условию $x+y+z=360,\ x>0,\ y>0,\ z>0$. Множество допустимых троек являются координатами точек треугольника MNP в пространстве:



Если треугольник тупоугольный, например $x>180$, то допустимые точки с координатами $(x;y;z)$ принадлежат треугольнику EFN, площадь которого равна $\frac{1}{4}S_{NMP}$. Аналогично, для допустимых точек при $y>180$ и $z>180$. Поскольку вероятность события пропорциональна площади соответствующей ему области в треугольнике MNP, имеем

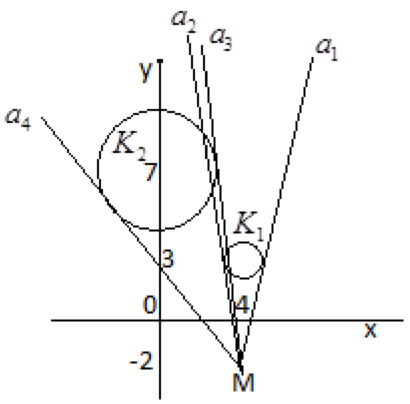
$P(A/x>180)=\dfrac{S_{EFN}}{S_{MNP}}=\dfrac{1}{4}$.

Ту же вероятность имеют события $P(A/y>180)=\dfrac{1}{4}$, $P(A/z>180)=\dfrac{1}{4}$. В итоге $P(A)=\dfrac{3}{4}$.



Задача 5 Ответ: $a \in \left(\dfrac{-36-6\sqrt{22}}{7}; -2\sqrt{6} \right)$

Решение



Обозначения:

$K_1 -$ окружность с уравнением $(x-4)^2+(y-3)^2-1=0$; $M(4;-2)-$ точка, через которую проходят прямые $ax-y-4a-2=0$ при любых a; $a_1, a_2 -$ значения параметра a, соответствующие касательным к окружности K_1, проведенным из точки M; $a_3, a_4 -$ значения параметра a, соответствующие касательным к окружности K_2, проведенным из точки M;

Вычисление a_1, a_2:

$$\begin{cases} (x-4)^2+(y-3)^2-1=0 \\ ax-y-4a-2=0 \to y-3=a(x-4)-5 \end{cases} \to (x-4)^2+\left(a(x-4)-5\right)^2-1=0 \to$$

$$\to \left(1+a^2\right)(x-4)^2-10a(x-4)+24=0$$

Условие касания $D/4=0 \to 25a^2-24(1+a^2)=0 \to \mathrm{a}^2=24 \to a_1=2\sqrt{6}, a_2=-2\sqrt{6}$

Вычисление a_3, a_4:

$$\begin{cases} x^2+(y-7)^2-9=0 \\ ax-y-4a-2=0 \to y-7=a(x-4)-9 \end{cases} \to x^2+\left(a(x-4)-9\right)^2-9=0 \to x^2+(ax-(4a+9))^2-9=0$$

$$\to \left(1+a^2\right)x^2-2a(4a+9)x+(4a+9)^2-9=0$$

Условие касания

$$D/4=0 \to a^2(4a+9)^2-(1+a^2)((4a+9)^2-9)=0 \to -(4a+9)^2+9(1+a^2)=0 \to$$

$$\to 7a^2+72a+72=0 \to a_3=\frac{-36-6\sqrt{22}}{7}, a_4=\frac{-36+6\sqrt{22}}{7}$$

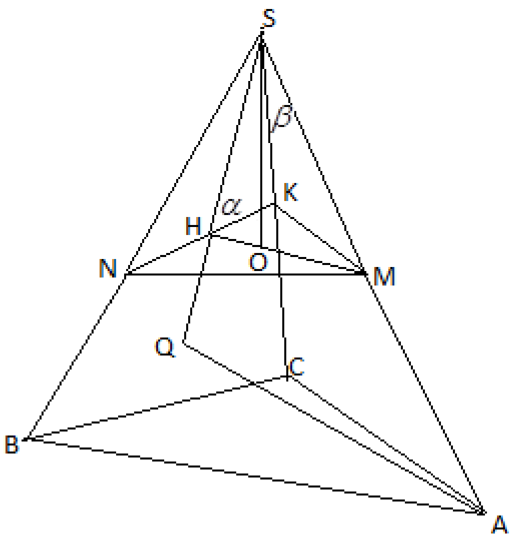
Заметим, что $a_3<a_2$ и для всех $a \in \left(a_3; a_2\right)$ прямая $ax-y-4a-2=0$ пересекает окружности K_1 и K_2, а система имеет четыре решения.

Задача 6 Ответ: $V_{SABC}=\dfrac{p\sqrt{3}\cos^2\alpha\sin\alpha}{\left(1+3\cos^2\alpha\right)^{3/2}}=\dfrac{p\sqrt{3}tg\alpha}{\left(tg^2\alpha+4\right)^{3/2}}$. В варианте 1 $\alpha=45^0, p=5\sqrt{15}, V=3$

Плоскость P пересекает боковые ребра SA, SB, SC треугольной пирамиды $SABC$ в точках M, N, K соответственно и образует угол α с боковой гранью SBC. Найти объем пирамиды $SABC$, если произведение ее ребер $SA \cdot SB \cdot SC = p$, а пирамида $SMNK$ правильная.

Ответ: $V_{SABC}=\dfrac{p\sqrt{3}\cos^2\alpha\sin\alpha}{\left(1+3\cos^2\alpha\right)^{3/2}}=\dfrac{p\sqrt{3}tg\alpha}{\left(tg^2\alpha+4\right)^{3/2}}$

Решение.



Обозначения: $H-$ середина NK; $\mathrm{R}MHS=\alpha-$ заданный угол; $\mathrm{R}MSK=\beta-$ угол при вершине правильной пирамиды; $\mathrm{R}MSH=\gamma-$ угол наклона ребра AS к плоскости боковой грани SBC;

$a-$ сторона правильного треугольника MNK; $l-$ боковое ребро правильной пирамиды $SMNK$

В этих обозначениях $V_{SABC}=\dfrac{1}{6}SA\cdot SB\cdot SC\cdot\sin\beta\cdot\sin\gamma=\dfrac{p}{6}\sin\beta\cdot\sin\gamma$.

Выразим $\sin\beta,\ \sin\gamma$ через тригонометрические функции угла α.

Из $\mathrm{V}SNK$ $a=2l\sin\beta/2$. Площадь боковой поверхности правильной пирамиды и площадь ее основания связаны соотношением:

$$S_{бок}\cdot\cos\alpha=S_{осн}\to\frac{3}{2}l^2\sin\beta=\frac{\sqrt{3}a^2}{4\cos\alpha}\to\frac{3}{2}\cdot\frac{a^2}{4\sin^2\beta/2}\sin\beta\cos\alpha=\frac{a^2\sqrt{3}}{4}\to tg\beta/2=\sqrt{3}\cos\alpha$$

Тогда $\sin\beta=\dfrac{2tg\beta/2}{1+tg^2\beta/2}=\dfrac{2\sqrt{3}\cos\alpha}{1+3\cos^2\alpha}$.

Из $\mathrm{V}SHM$ по теореме синусов $\sin\gamma=\dfrac{\sqrt{3}\cdot a\cdot\sin\alpha}{2l}$.

Из $\mathrm{V}SOM$ $l^2=\left(\dfrac{a\sqrt{3}}{6}tg\alpha\right)^2+\left(\dfrac{a\sqrt{3}}{3}\right)^2=\dfrac{a^2}{12}\left(tg^2\alpha+4\right)\to l=\dfrac{a\sqrt{1+3\cos^2\alpha}}{2\sqrt{3}\cos\alpha}$.

Тогда $\sin\gamma=\dfrac{3\sin\alpha\cos\alpha}{\sqrt{1+3\cos^2\alpha}}$. Объединяя формулы, получим объем $V_{SABC}=\dfrac{p\sqrt{3}\cos^2\alpha\sin\alpha}{\left(1+3\cos^2\alpha\right)^{3/2}}=\dfrac{p\sqrt{3}tg\alpha}{\left(tg^2\alpha+4\right)^{3/2}}$

Вариант 2

Задача 1 Ответ: $a=4379$

Задача 2 Ответ: $y_{\min}=\dfrac{1}{17}$

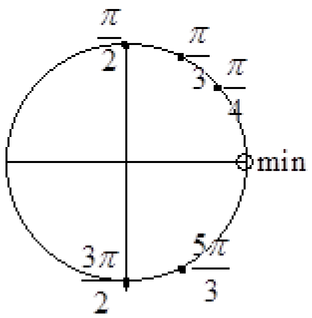
Решение

Преобразование:

$$\cos x\left[\sin x+(1+2\sqrt{2})\cos x-2\sin x\cos x-(\sqrt{2}+2\cos^2 x)\right]=0\to$$

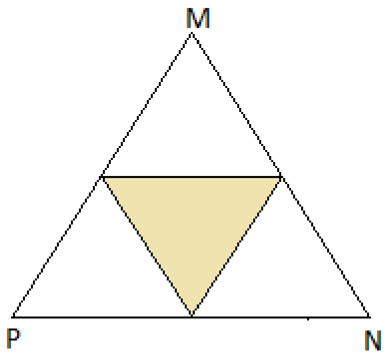
$$\cos x\left[\sin x(1-2\cos x)+\cos x(1-2\cos x)-\sqrt{2}(1-2\cos x)\right]=0\to$$

$$\cos x\cdot(1-2\cos x)\cdot(\sin x+\cos x-\sqrt{2})=0$$



Задача 3 Ответ: 5103

Задача 4 Ответ: $P(A)=\frac{1}{4}$



Задача 5 Ответ: $a=\frac{6\sqrt{2}-4}{7}$, $a=\frac{8-\sqrt{19}}{15}$

Задача 6 $V_{SABC}=\frac{p\sqrt{3}\cos^2\alpha\sin\alpha}{\left(1+3\cos^2\alpha\right)^{3/2}}=\frac{p\sqrt{3}tg\alpha}{\left(tg^2\alpha+4\right)^{3/2}}$. В варианте 2 $\alpha=60^0$, $p=14\sqrt{7}, V=6$

Вариант 3

Задача 1 Ответ: $a=8014$

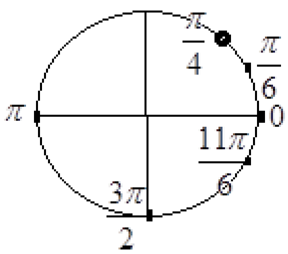
Задача 2 Ответ: $y_{\max}=\frac{3}{26}$

Решение

Преобразование:

$$\sin x\left[\sqrt{3}\sin x-\sqrt{3}\cos x-2\cos x+\sqrt{3}-2\sin x\cos x+2\cos^2 x\right]=0\rightarrow$$

$$\sin x\left[\sqrt{3}(\sin x-\cos x+1)-2\cos x(1+\sin x-\cos x)\right]=\sin x\cdot(\sin x-\cos x+1)\cdot\left(\sqrt{3}-2\cos x\right)=0$$

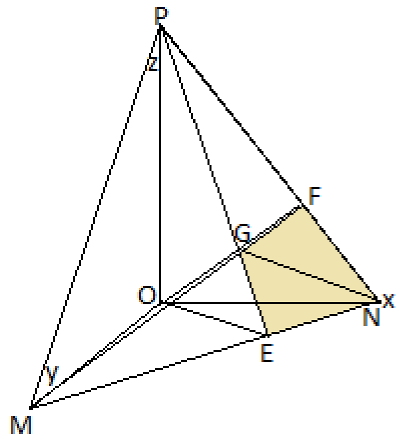


Задача 3 Ответ: 576

Задача 4 Ответ: $P(A)=\frac{1}{2}$

Решение

Пусть, например $x > 2y, x > 2z$. На рис изображена область в треугольнике MNP соответствующая этим неравенствам.

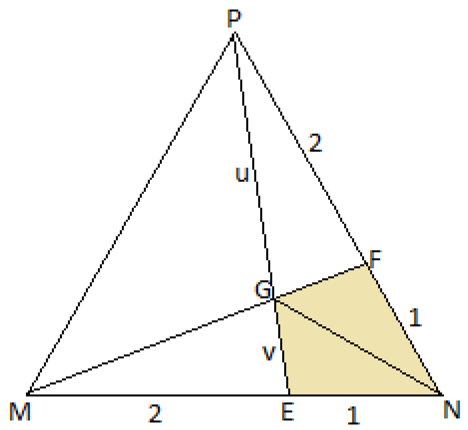


$OE-$ прямая на плоскости xoy с уравнением $x = 2y$; $NE : NM = 1:3$

$OF-$ прямая на плоскости xoz с уравнением $x = 2z$; $NF : NP = 1:3$

Прямые MF и PE на плоскости треугольника MNP пересекаются в точке G. Допустимые тройки

$(x; y; z) \leftrightarrow \begin{cases} x + y + z = 360 \\ x > 2y \\ x > 2z, x > 0, y > 0, z > 0 \end{cases}$ являются координатами точек четырехугольника $NEGF$.

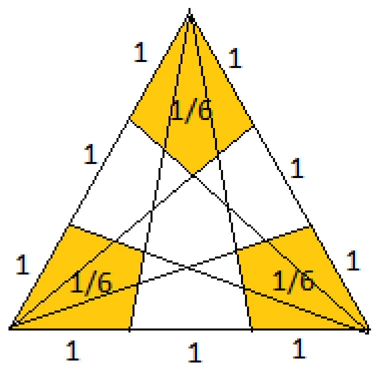


Точка G делит отрезок PE в отношении $PG : GE = u : v$ и по теореме Менелая (треугольник NPE и секущая FM)

$$\frac{1}{2} \cdot \frac{u}{v} \cdot \frac{2}{3} = 1 \rightarrow u = 3v$$

Площадь треугольника NGE равна $S_{NGE} = \frac{1}{4} S_{NEP} = \frac{1}{12} S_{NMP} \rightarrow S_{NEGF} = \frac{1}{6} S_{MNP} \rightarrow P(A / x > 2y, x > 2z) = \frac{1}{6}$.

Аналогично, $P(A / y > 2x, y > 2z) = P(A / z > 2x, z > 2y) = \frac{1}{6}$. Тогда $P(A) = 3 \cdot \frac{1}{6} = \frac{1}{2}$.



Задача 5 Ответ: $a \in \left(-\infty; \frac{4 - 3\sqrt{14}}{4}\right) \cup \left(\frac{5}{12}; \frac{4 + 3\sqrt{14}}{4}\right)$

Задача 6. $V_{SABC}=\dfrac{p\sqrt{3}\cos^2\alpha\sin\alpha}{\left(1+3\cos^2\alpha\right)^{3/2}}=\dfrac{p\sqrt{3}tg\alpha}{\left(tg^2\alpha+4\right)^{3/2}}$. В варианте 3. $\alpha=30^0,\ p=13\sqrt{39}, V=9$

Вариант 4

Задача 1 Ответ: $a=4465$

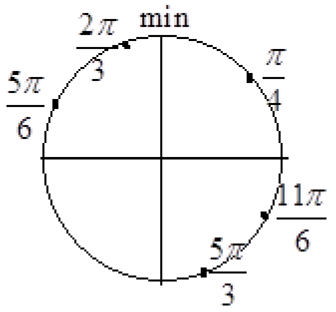
Задача 2 Ответ: $y_{\min}=\dfrac{19}{37}$

Решение

Преобразование:

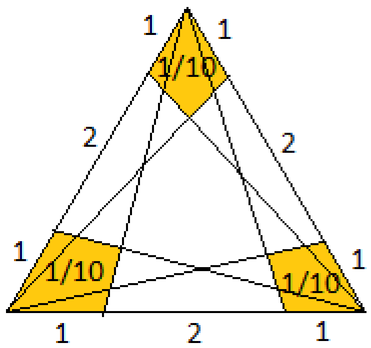
$$\sqrt{3}\left(\sin x+\cos x-\sqrt{2}\right)+2\sin 2x\left(\sin x+\cos x-\sqrt{2}\right)=0\rightarrow$$

$$\left(\sin x+\cos x-\sqrt{2}\right)\left(2\sin 2x+\sqrt{3}\right)=0$$



Задача 3 Ответ: 295245

Задача 4 Ответ: $P(A)=\dfrac{3}{10}$



Задача 5 Ответ: $a=-\dfrac{4}{3},\ \ a=\dfrac{5+2\sqrt{22}}{21}$

Задача 6. $V_{SABC}=\dfrac{p\sqrt{3}\cos^2\alpha\sin\alpha}{\left(1+3\cos^2\alpha\right)^{3/2}}=\dfrac{p\sqrt{3}tg\alpha}{\left(tg^2\alpha+4\right)^{3/2}}$. В варианте 4 $\alpha=arctg\sqrt{5},\ \mathrm{p}=27\sqrt{15}, V=15$

Решения
Заключительный тур олимпиады Росатом,
математика, 11 класс, комплект 1
2017-2018 учебный год

1. Найти x, при которых числа $\log_2(6\sin x), \log_{2\cos x}(6\sin x)$ и $\log_{2\cos x} 4$ могут быть тремя последовательными членами геометрической прогрессии.

2. Найти решения $(x; y)$ системы $\begin{cases} \sin(2x+y) = -1 \\ \cos(x-y) = 1 \end{cases}$ в прямоугольнике $-\pi \le x \le \pi/2, -\pi/2 \le y \le \pi/2$.

3. Отрезок $[A; B]$ длины 5 двигается на координатной плоскости так, что его концы лежат на параболе $y = 2x^2$. Точка M - середина отрезка $[A; B]$. Найти минимально возможное значение расстояния точки M до оси абсцисс, а также абсциссу точки M, при которой оно достигается.

4. Код замка состоит из трех цифр от 0 до 9. Замок открывается, если сумма цифр кода делится на 3. Найти вероятность того, что случайно набранный код откроет замок.

5. При каких a система уравнений $\begin{cases} \left|\left|x\cos a + y\sin a - 3/\sqrt{2}\right| + \left|y\cos a - x\sin a\right| = 3/\sqrt{2} \right. \\ |x-y| + |x+y| = 8 \end{cases}$ имеет единственное решение?

6. В правильной четырехугольной пирамиде противоположные боковые грани перпендикулярны. Высота пирамиды равна h. Найти радиус шара, касающегося ребер основания и боковых ребер пирамиды или их продолжений.

Решения

Вариант 1

Задача 1 Ответ: $x=\frac{\pi}{6}+2\pi k, k\in Z$

Решение

Условие прогрессии: $\log_2(6\sin x)\cdot\log_{2\cos x}4=\left(\log_{2\cos x}(6\sin x)\right)^2$

Преобразование:

$$2\log_{(2\cos x)}(6\sin x)=\left(\log_{(2\cos x)}(6\sin x)\right)^2\to\log_{(2\cos x)}(6\sin x)\cdot\left(2-\log_{(2\cos x)}(6\sin x)\right)=0$$

Если $\log_{(2\cos x)}(6\sin x)=0$, то все члены прогрессии нулевые.

Случай $\log_{(2\cos x)}(6\sin x)\neq 0$.

$$\log_{(2\cos x)}(6\sin x)=2\to\begin{cases}\cos x>0,\ \cos x\neq 1/2\\ 6\sin x=4\cos^2 x\end{cases}\to\begin{cases}\cos x>0,\ \cos x\neq 1/2\\ 2\sin^2 x+3\sin x-2=0\end{cases}\to\begin{cases}\sin x=\frac{1}{2}\\ \cos x>0\end{cases}\to$$

$$\to x=\frac{\pi}{6}+2\pi k, k\in Z$$

Задача 2 Ответ $\begin{cases}x_1=-\pi/6\\ y_1=-\pi/6\end{cases},\begin{cases}x_2=\pi/2\\ y_2=\pi/2\end{cases}$

Решение.

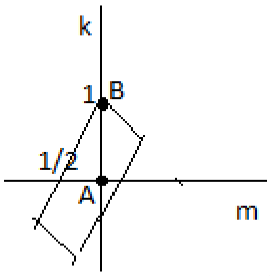
Переход к системе с целочисленными параметрами m и k: $\begin{cases}2x+y=-\frac{\pi}{2}+2\pi k,\\ x-y=2\pi m\end{cases}$

Решение системы $\begin{cases}x=-\pi/6+2\pi(m+k)/3\\ y=-\pi/6+2\pi(k-2m)/3\end{cases}$.

Ограничение прямоугольника: $-\pi\le x\le\pi/2\to -5/4\le m+k\le 1$ (*)

$$-\pi/2\le y\le\pi/2\to -1/2\le k+2m\le 1 \ (**)$$

На плоскости параметров $(m;k)$ неравенства (*) и (**) ограничивают параллелограмм,



,

внутри которого только две точки $A(0;0)$ и $B(0,1)$ с целочисленными координатами.

Им соответствуют решения $\begin{cases}x_1=-\pi/6\\ y_1=-\pi/6\end{cases}$ и $\begin{cases}x_2=\pi/2\\ y_2=\pi/2\end{cases}$.

Задача 3 Ответ: 1) $d_{min}=\frac{19}{8}$ 2) $x_{\min}=\pm\frac{3}{4}$

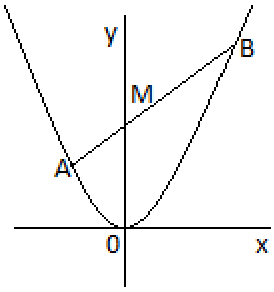
Вариант 0

Отрезок $[A;B]$ длины l двигается на координатной плоскости так, что его концы лежат на параболе $y=kx^2$. Точка M - середина отрезка $[A;B]$. Найти минимально возможное расстояние точки M до оси абсцисс, а также абсциссу точки M, при которой оно достигается.

Ответ: При $|k|l \ge 1$ $d_{\min} = \frac{l}{2} - \frac{1}{4|k|}$ для $x_{1,2} = \pm \frac{\sqrt{|k|l-1}}{2|k|}$

При $|k|l < 1$, $d_{\min} = \frac{|k|l^2}{4}$ для $x = 0$.

Решение.



$$A(x_1; y_1),\ B(x_2; y_2),\ M(x; y) = M\left(\frac{x_1+x_2}{2}; \frac{y_1+y_2}{2}\right)\ y_1 = kx_1^2,\ y_2 = kx_2^2\ , (x_2-x_1)^2 + (y_2-y_1)^2 = l^2,$$

$$(x_2-x_1)^2 + (kx_2^2 - kx_1^2)^2 = l^2 \to (x_2-x_1)^2 + k^2(x_2-x_1)^2(x_2+x_1)^2 = l^2$$

$$(x_2-x_1)^2\left(k^2(x_2+x_1)^2+1\right) = l^2 \to (x_1^2 + x_2^2 - 2x_1x_2)(4k^2x^2+1) = l^2$$

$$\left(\frac{y_1+y_2}{k} - 2x_1x_2\right)(4k^2x^2+1) = l^2 \to \frac{2y}{k} = 2x_1x_2 + \frac{l^2}{(4k^2x^2+1)} (*)$$

Выразим $2x_1x_2$ из равенства $4x^2 = (x_1+x_2)^2 = \frac{2y}{k} + 2x_1x_2 \to 2x_1x_2 = 4x^2 - \frac{2y}{k}$. Подставляя его в (*), получим

$\frac{4y}{k} = 4x^2 + \frac{l^2}{(4k^2x^2+1)} \to y = kx^2 + \frac{k \cdot l^2}{4(4k^2x^2+1)} (**)$. Это ордината точки M.

Преобразуем выражение (**): $|y| = |k|x^2 + \frac{|k| \cdot l^2}{4(4k^2x^2+1)} = \frac{1}{4|k|}\left(4k^2x^2+1\right) + \frac{|k| \cdot l^2}{4(4k^2x^2+1)} - \frac{1}{4|k|}$

Обозначим через $t = \left(4k^2x^2+1\right) \ge 1$. Тогда расстояние точки M до оси абсцисс равно $|y| = \frac{t}{4|k|} + \frac{|k|l^2}{4t} - \frac{1}{4|k|}$. Поскольку $a = \frac{t}{4|k|} > 0,\ b = \frac{|k|l^2}{4t} > 0$, то по неравенству о среднем арифметическом и среднем геометрическом

$|y| + \frac{1}{4|k|} = a + b \ge 2\sqrt{ab} = \frac{l}{2}$. Равенство достигается при $a = b \to \frac{t}{4|k|} = \frac{|k|l^2}{4t} \to t_{\text{крит}} = |k| \cdot l$.

Если $|k|l \ge 1$, то минимальное расстояние равно $|y_{\min}| = \frac{l}{2} - \frac{1}{4|k|}$ достигается при

$$t = |k|l \to 4k^2x^2 + 1 = |k|l \to x^2 = \frac{|k| \cdot l - 1}{4k^2} \to x_{1,2} = \pm\frac{\sqrt{|k| \cdot l - 1}}{2|k|}.$$

Если $|k|l < 1$, то с учетом роста функции $|y|$ на полуоси $t \in \left[|k|l; +\infty\right]$ и принимает минимальное значение

$|y_{\min}| = \frac{|k|l^2}{4}$ с учетом ограничения $t \ge 1$ при $t = 1$ для $x = 0$.

Задача 4 Ответ: $P(A) = 0,334$, $m_3 = 334$, $n = 10^3$

Решение

Пусть x, y и $z -$ первая, вторая и третья цифры кода. Количество решений уравнения $x + y = t$, где $t -$ целое число на интервале $0 \le t \le 18$ обозначим через $p(t)$. Заметим, что

$$p(t)=\begin{cases} t+1, t\in[0;9] \\ 19-t, t\in[10;18] \end{cases}$$

С помощью этой формулы легко заполнить таблицу числа различных решений уравнения $x+y=3k-z$ для допустимых значений $k=0,1,...,9$ и $z=0,1,...,9$

K \ z	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1									
1	4	3	2	1						
2	7	6	5	4	3	2	1			
3	10	9	8	7	6	5	4	3	2	1
4	7	8	9	10	9	8	7	6	5	4
5	4	5	6	7	8	9	10	9	8	7
6	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
7				1	2	3	4	5	6	7
8							1	2	3	4
9										1

Пустые клетки таблицы можно заполнить нулями (решений уравнение не имеет). Сумма чисел по всем клеткам таблицы равна количеству кодов, сумма цифр которых делится на 3. Подсчет этой суммы осуществляется с учетом симметрии таблицы (сумма чисел в первых пяти строках равна сумме чисел в последних пяти), а также формулой суммы членов арифметической прогрессии. Число благоприятных кодов $m_3=334$. Общее число кодов равно $n_3=10^3$. Тогда

$$P_3(A)=\frac{334}{1000}=0,334.$$

Задача 5 Ответ: $a=\pm\arccos\frac{2\sqrt{2}}{3}+\frac{\pi k}{2}, k\in Z$ или $a=\arccos\frac{2\sqrt{2}}{3}+\frac{\pi k}{2}, a=\arcsin\frac{2\sqrt{2}}{3}+\frac{\pi k}{2}, k\in Z$

Решение

Множество точек на плоскости с координатами $(x;y)$, удовлетворяющими второму уравнению системы, является границей квадрата с центром в начале координат и сторонами, параллельными координатным осям рис 1. Множество точек, координаты которых удовлетворяют второму уравнению системы, является границей квадрата $ABOD$ рис 2 с диагональю длины $3\sqrt{2}$. Координаты его вершин

$$A(3\sqrt{2}\cos\alpha;3\sqrt{2}\sin\alpha),\ B\left(3\cos\left(\alpha+\frac{\pi}{4}\right);3\sin\left(\alpha+\frac{\pi}{4}\right)\right),\ D\left(3\cos\left(\alpha-\frac{\pi}{4}\right);3\sin\left(\alpha-\frac{\pi}{4}\right)\right);O(0;0)$$

С ростом a «малый» квадрат (со стороной 3) вращается относительно начала координат. На рис 2 отмечено его положение при $\alpha=\alpha_1$, когда вершина A находится на стороне «большого» квадрата (со стороной 8).

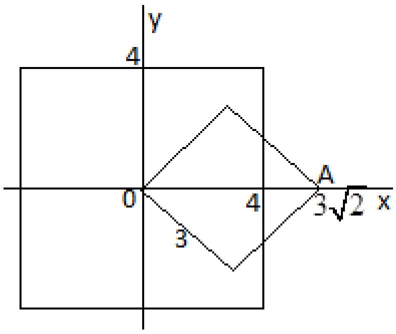


Рис 1

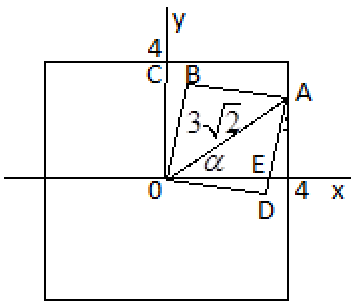


Рис 2

$$3\sqrt{2}\cos a_1=4\to\cos a_1=\frac{2\sqrt{2}}{3}\to a_1=\arccos\frac{2\sqrt{2}}{3}$$

Все остальные вершины «малого» квадрата при $a=a_1$ находятся внутри большого:

$$\mathrm{R}COB=\frac{\pi}{4}-a_1\to 3\cos\left(\frac{\pi}{4}-a_1\right)=3\cdot\frac{\sqrt{2}}{2}(\cos a_1+\sin a_1)=3\cdot\frac{\sqrt{2}}{2}\left(\frac{2\sqrt{2}}{3}+\frac{1}{3}\right)=\frac{4+\sqrt{2}}{2}<4$$

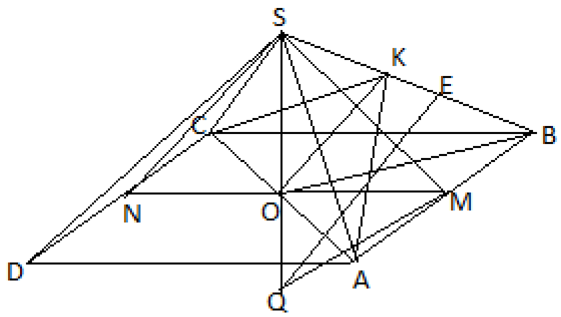
$$\mathrm{R}EOD=\frac{\pi}{4}-a_1\to EO=3/\cos\left(\frac{\pi}{4}-a_1\right)=\frac{18}{4+\sqrt{2}}<4$$

и система имеет единственное решение. По симметрии, при увеличении a точка A появится на другой стороне большого квадрата при $a = a_2 = \dfrac{\pi}{2} - a_1 = \arcsin\dfrac{2\sqrt{2}}{3}$, когда система снова имеет единственное решение. При $a \in (a_1; a_2)$ система решений не имеет. При увеличении a на число кратное $\dfrac{\pi}{2}$ картина повторяется. Итак, система имеет единственное решение при $a = \arcsin\dfrac{2\sqrt{2}}{3} + \dfrac{\pi k}{2}$, $a = \arccos\dfrac{2\sqrt{2}}{3} + \dfrac{\pi k}{2}$, $k \in Z$ или в другой форме записи

$$a = \pm a_1 + \frac{\pi k}{2} = \pm\arccos\frac{2\sqrt{2}}{3} + \frac{\pi k}{2}.$$

Задача 6 Ответ: $R_{1,2} = 2h\sqrt{2 \pm \sqrt{3}}$

Решение.



Обозначения:

$SO = h$, $OM = a$, $N, M -$ середины сторон основания, $\mathrm{R}MSN = 90^0 \rightarrow h = a, AB = 2a = 2h$,

$Q -$ центр искомого шара; OK - перпендикуляр к ребру SB; QE - параллельно OK; $OQ = x$;

$OA = h\sqrt{2} = SM$, $SB = h\sqrt{3}$, $\mathrm{R}SBO = \alpha = \mathrm{R}SOK$; $\mathrm{R}AKO = \varphi$

Из площади треугольника SAB:

$$2\sqrt{2}h^2 = AK \cdot h\sqrt{3} \rightarrow AK = \frac{2\sqrt{2}}{\sqrt{3}}h, \ \sin\varphi = \frac{OA}{AK} = \frac{\sqrt{3}}{2} \rightarrow \varphi = 60^0$$

Из прямоугольного треугольника SOK:

$$OK^2 = \frac{8}{3}h^2 - 2h^2 = \frac{2}{3}h^2 \rightarrow \cos\alpha = \frac{OK}{OS} = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}.$$

$QS = h + x$, $QE = QM = R -$ радиус искомого шара. $\mathrm{R}SQE = \alpha$

Уравнение для $R: (h+x)\cos\alpha = \sqrt{h^2 + x^2} \rightarrow \dfrac{2}{3}(h+x)^2 = h^2 + x^2 \rightarrow x^2 - 4hx + h^2 = 0 \rightarrow x = h\left(2 \pm \sqrt{3}\right)$

Тогда $R^2 = x^2 + h^2 = 4xh = 4h^2\left(2 \pm \sqrt{3}\right) \rightarrow R_{1,2} = 2h\sqrt{2 \pm \sqrt{3}}$ (касание ребер или их продолжений)

Вариант 2

Задача 1 Ответ: $x \in \varnothing$

Задача 2 Ответ $\begin{cases} x_1 = \pi \\ y_1 = \pi/2 \end{cases}, \begin{cases} x_2 = 0 \\ y_2 = \pi/2 \end{cases}$

Задача 3 Ответ: 1) $d_{min} = \frac{19}{20}$ 2) $x_{\min} = \pm\frac{3}{10}$

Задача 4 Ответ: $m_4 = 254,\ n_4 = 10^3, P(A) = 0,254$

K \ z	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1									
1	5	4	3	2	1					
2	9	8	7	6	5	4	3	2	1	
3	7	8	9	10	9	8	7	6	5	4
4	3	4	5	6	7	8	9	10	9	8
5			1	2	3	4	5	6	7	8
6						1	2	3	4	5

Задача 5
Ответ:
$a \in \left(\arccos\frac{3}{4} + \pi \right.$

Задача 6
Ответ:
$R = \frac{\sqrt{3}}{2} b$

Вариант 3

Задача 1 Ответ: $x = \frac{\pi}{4} + \pi k, k \in Z$

Задача 2 Ответ $\begin{cases} x = -\frac{\pi}{8} \\ y = \frac{3\pi}{4} \end{cases}$

Задача 3 Ответ: 1) $d_{min} = \frac{51}{52}$ 2) $x_{\min} = \pm\frac{5}{26}$

Задача 4 Ответ: $m_5 = 200,\ n_5 = 10^3,\ P(A) = 0,2$

K \ z	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1									
1	6	5	4	3	2	1				
2	9	10	9	8	7	6	5	4	3	2
3	4	5	6	7	8	9	10	9	8	7
4			1	2	3	4	5	6	7	8
5								1	2	3

Задача 5
Ответ:
$a \in \left(-\frac{\pi}{6} + \frac{\pi k}{2}; \frac{\pi}{6} \right.$

Задача 6

Ответ: $S = \frac{a^2\sqrt{3}}{6}$

Вариант 4

Задача 1 Ответ: $x = (-1)^k \frac{\pi}{4} + \pi k, k \in Z$

Задача 2 Ответ $\begin{cases} x=-\pi \\ y=\dfrac{\pi}{2} \end{cases}; \begin{cases} x=\pi \\ y=\dfrac{\pi}{2} \end{cases}; \begin{cases} x=0 \\ y=\dfrac{\pi}{2} \end{cases};,$

Задача 3 Ответ: 1) $d_{min}=\frac{99}{20}$ 2) $x_{\min}=\pm\frac{7}{10}$

Задача 4 Ответ: $m_6=167,\ n_6=10^3, P(A)=0{,}167$

z / K	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1									
1	7	6	5	4	3	2	1			
2	7	8	9	10	9	8	7	6	5	4
3	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
4							1	2	3	4

Задача 5 Ответ: $a=\pm\frac{\pi}{6}+\frac{\pi k}{2}, k \in$

Задача 6

Ответ: $V=\frac{4\left(7+5\sqrt{2}\right)}{3}r^3$