2.7. Задания заключительного этапа олимпиады «Росатом», 11 класс (комплект 1)

Задания

1. Для каждой пары целых, положительных чисел (m,n), связанных соотношением $3m+2n=19$, найти решение x уравнения $2^{r_n x}+r_m\cdot 2^x-8=0$, где r_k – остаток от деления k на 3.

2. Найти все x, для которых $\sin a_n x+\sin a_{n+1}x+\sin a_{n+2}x=0$ при всех n, где a_n – арифметическая прогрессия с разностью $d=\pi/10$ и первым членом $a_1=\pi/2$.

3. Сколько существует различных, целых, положительных, двенадцатиразрядных чисел, делящихся на 9, в записи которых используется две цифры 3 и 4?

4. Случайно выбранное шестизначное целое положительное число оканчивается на 32. Найти вероятность того, что оно делится на 14.

5. При каких значениях a система $\begin{cases} 2[x]-3[y]=7 \\ 3x+2y=a \end{cases}$ имеет единственное решение? Здесь $[z]$ - целая часть числа z - наибольшее целое число, не превосходящее z.

6. Через ребро AB основания правильной четырехугольной пирамиды $EABCD$ проведена плоскость P, пересекающая ребра EC и ED в точках M и N соответственно. Плоскость P делит объем пирамиды в отношении $V_{EABMN}:V_{EABCD}=5:9$. Найти отношение площадей полных поверхностей пирамид $S_{EABMN}:S_{EABCD}$, если боковые грани пирамиды $EABCD$ наклонены к плоскости основания $ABCD$ под углом $\alpha=arctg5$.

2.8. Задания заключительного этапа олимпиады «Росатом», 11 класс (комплект 2)

Задания

1. При каких натуральных n уравнение $\log_2 x + \log_2 x^3 + \log_2 x^5 + ... + \log_2 x^{2n-1} = 5040$ имеет рациональное решение?

2. Найти наибольшее значение выражения $|x| + |y| + |z|$ для троек $(x; y; z)$, удовлетворяющих системе $\begin{cases} \sin x \cdot \sin(x+y) \cdot \sin(x+y+z) = 0 \\ x^2 + y^2 + z^2 = \dfrac{\pi^2}{3} \end{cases}$. Найти тройки $(x; y; z)$, для которых наибольшее значение достигается.

3. Целые числа $2a^2$ и $3a$ имеют одинаковые остатки при делении на 18. Какие ненулевые остатки может иметь число $a > 0$ при делении на 18?

4. Через случайно выбранные три вершины куба с ребром 2 проводится плоскость. Найти вероятность того, что площадь сечения превзойдет 5. Допускается, что эти вершины принадлежат одной грани куба.

5. Целое число n таково, что $\cos\dfrac{(2n^2 + n + 1)\pi}{2} = 1$, а уравнение $\sin x \cdot \sin 5x \cdot \sin nx = 1$ имеет решение. Найти все такие n.

6. Две параллельные прямые, расстояние между которыми 1, пересекают прямоугольник размерами 3×5 под углом $\alpha = arctg\dfrac{3}{4}$ к его стороне. Найти максимальное возможное значение суммы длин отрезков этих прямых, принадлежащих прямоугольнику.

2.9. Задания заключительного этапа олимпиады «Росатом», 11 класс (комплект 3)

Задания

1. Рациональные числа x и y таковы, что их логарифмы $\log_{\sqrt{2}} x$ и $\log_{\sqrt[3]{3}} y$ также рациональны и их сумма равна 73. Найти x и y.

2. Найти номера $n \geq 1$ членов арифметической прогрессии $a_n = \dfrac{5n+2}{3}$, являющихся решениями уравнения $\sqrt{10}\cos(\pi a_n) = \sqrt{4\cos(\pi a_n) - \cos(2\pi a_n)}$.

3. Целые, положительные, шестизначные числа a_1 и a_2 такие, что если к сумме цифр числа a_1 прибавить сумму цифр числа a_2, то получится 36. Найти наибольшее возможное при этих условиях значение $a_1 \cdot a_2$.

4. Игральная кость имеет форму правильной четырехугольной пирамиды с двугранным углом 60^0 при основании. На боковых гранях пирамиды нарисованы цифры от 1 до 4, на основании – 5. Вероятность того, что при бросании кость ляжет на плоскость, закрывая определенную цифру, пропорциональна площади грани или основания с этой цифрой. Найти вероятность того, что сумма цифр, закрытых костью при трех бросаниях, равна 13.

5. При каких целых, положительных n уравнение $\sin x \cdot \sin 2x \cdot \sin 3x \cdot \ldots \cdot \sin nx = 0$ имеет не менее десяти решений на отрезке $\left[0; \pi/4\right]$?

6. На боковых ребрах EA, EB, EC правильной четырехугольной пирамиды $ABCDE$ расположены точки M, N, K соответственно, причем $EM : EA = 1:2,\ EN : EB = 2:3,\ EK : EC = 1:3$. В каком отношении делит объем пирамиды плоскость, проходящая через точки M, N, K?

2.10. Задания заключительного этапа олимпиады «Росатом», 11 класс (комплект 4)

Задания

1. Отрезок $[2;29]$ числовой оси разбит двумя точками a и b на три отрезка, длины которых x, y и z соответственно. Найти наибольшее возможное значение выражения $\log_3 x + \log_3 y + \log_3 z$.

2. Решить уравнение $\cos(\arcsin(\sin x)) = \sin(\arccos(\cos 2x))$.

3. Найти целые положительные делители x и y числа 1232, удовлетворяющие уравнению $5x - 3y + 13 = 0$.

4. Игральная кость представляет собой кубик, на гранях которого отмечено другим цветом от одного до шести очков. Петя случайным образом бросает на стол три игральных кости одновременно и считает сумму числа очков, выпавших на всех костях. Каждое значение s этой суммы, расположенное от 3 до 18, может появится с определенной вероятностью. Найти s , при котором эта вероятность максимально возможная.

5. Область D на координатной плоскости $k0b$ такова, что для любой точки $(k;b) \in D$ прямая с уравнением $y = kx + b$ имеет с треугольником ABC на координатной плоскости $x0y$ с вершинами $A(-1;2), B(2;1), C(-1;-5)$ хотя бы одну общую точку. Найти площадь пересечения D с полуполосой $k \in [-2;5], b \geq 0$. Для каждого $k \in [-2;5]$ найти b , при котором прямая не пересекает треугольник.

6. На дуге, равной половине дуги окружности радиуса R , расположены 5 точек, являющихся вершинами выпуклого многоугольника. Найти периметр многоугольника, если известно, что сумма квадратов длин его сторон максимально возможная.