2.2. Задания отборочного этапа олимпиады «Росатом», 11 класс (комплект 1)

Задания

1. При каком значении a многочлены $p(x) = ax^3 + x^2 - (a+4)x + 3$ и $p'(x)$ имеют общий корень?

2. При каких целых n любой отрезок длины $\pi / 3$ оси OX содержит не менее 10 решений уравнения $\cos nx - \cos(n-1)x = 0$?

3. Найти все целые положительные числа a, для которых остаток r от деления a на 18 удовлетворяет условию $15r^2 - 18r + 6 = a$.

4. Четыре ученика сидят за круглым столом и играют по следующим правилам. Первому игроку сообщают число $a = 12$. Он, совершенно случайно для себя, выбирает делить или умножать его на 2 и передает результат соседу справа. Тот проделывает то же самое с тем числом, которое ему сообщил сосед слева и т.д. до тех пор, пока преобразованное число b не возвращается к первому игроку и он объявляет результат. Найти вероятность того, что число b окажется целым.

5. Для каждого a найти b, при котором система $\begin{cases} (x+2)^2 + y^2 = 2y \\ (x-a)^2 + y^2 = 2by \end{cases}$ имеет единственное решение.

6. Муравьи Гоша и Кеша бегают по поверхности куба $ABCDA'B'C'D'$ с ребром a по замкнутым траекториям, пробегая их много раз. Гоша пробегает стороны квадрата основания $ABCD$, преодолевая расстояние a за 3 минуты. Кеша бежит по сторонам треугольника $CB'D'$, покрывая расстояние a за 2 минуты. В момент начала движения Гоша находился в вершине A, а Кеша – в вершине C. Докажите, что Гоша и Кеша никогда не встретятся. В момент времени T оказалось, что Кеша находится в вершине C, а Гоша на расстоянии не большем, чем $a/10$ от него. Найти наименьшее возможное значение T .

($\sqrt{2} \approx 1,4142$)

2.3. Задания отборочного этапа олимпиады «Росатом», 11 класс (комплект 2)

Задания

1. Многочлен $p(x)=ax^2+bx+c$ назовем совершенным, если коэффициенты a,b,c являются его корнями. Сколько существует совершенных многочленов второй степени? Найдите все совершенные многочлены с коэффициентом $a>0$.

2. Найти целые m, при которых $x=\pi/3$ является решением уравнения $\cos\left(\frac{\pi\sqrt{3}}{2}\sin mx\right)+\sin\left(\frac{\pi}{2}\cos mx\right)=0$.

3. Найти произведение всех целых положительных делителей числа $a=2^3\cdot 3^4\cdot 5^2$.

4. Величина a равномерно распределена на отрезке $[-1;5]$. Найти вероятность события, при котором система $\begin{cases}|x|+y=3\\ 2y+|x+4|=2a\end{cases}$ имеет два решения $(x;y)$ с абсциссой $x\in[-3;3]$.

5. Окружность радиуса r катится по прямой с уравнением $x+y=-2$ в полуплоскости $x+y\geq -2$. Найти максимальное значение r, при котором в своем движении окружность никогда не пересечет параболу $y=x^2-4x+5$.

6. В прямоугольнике $ABCD$ со сторонами $AB=2, BC=3$ расположена полуокружность K с диаметром AB. Прямая L касается полуокружности K. Найти максимальную возможную длину отрезка прямой L, расположенного в прямоугольнике $ABCD$.

2.4. Задания отборочного этапа олимпиады «Росатом», 11 класс (комплект 3)

Задания

1. Приведенные многочлены $p_1(x)$ и $p_2(x)$ степени 1 и 4 таковы, что их произведение $p(x)=p_1(x)\cdot p_2(x)$ имеет только действительные корни и их три: $x_1=1,\ x_2=2,\ x_3=-3$ Многочлены $p_1(x)$ и $p_2(x)$ имеют общий корень. Найти многочлены $p_1(x)$ и $p_2(x)$, для которых величина $p_1(0)+p_2(0)$ имеет наибольшее возможное значение.

2. Решить неравенство $8\sin \pi x+16x^3-44x^2+32x\geq 15$ на полуоси $x\leq 1$.

3. Целые, положительные делители x и y числа 15000 удовлетворяют уравнению $6x^2-5xy+y^2=0$.Найти максимальное значение выражения $2x+3y$.

4. Случайная величина ξ принимает значения $-1;\ -0,2;\ 2$ с вероятностями $3/16;1/4;\ 9/16$ соответственно. Найти вероятность того, что уравнение $\xi x^2+(1-\xi)x-(\xi+2)=0$ имеет единственное решение.

5. Пусть $x_1=b,\ x_2=c$, а остальные члены последовательности x_n определяются формулой $x_{n+2}=3x_{n+1}-2x_n+a$ при некотором a , не зависящим от n . При каких a,b,c последовательность x_n является убывающей арифметической прогрессией? При каких a,b,c последовательность x_n является возрастающей геометрической прогрессией?

6. В квадрате со стороной $2\sqrt{2}$ расположена окружность радиуса 1, центр которой совпадает с центром квадрата. Прямая, касающаяся окружности, разбивает квадрат на две части. Найти наименьшее возможное значение отношения их площадей.

2.5. Задания отборочного этапа олимпиады «Росатом», 11 класс (комплект 4)

Задания

1. Найти многочлены $p_1(x)$ и $p_2(x)$ с единичным коэффициентом при старшей степени x (приведенные многочлены), для которых $p_1(x)+p_2(x)=(x^2+x-2)(x^2-3)$ и

$p_1(x)\cdot p_2'(x)=p_2(x)\left(2xp_2(x)+p_1'(x)\right)$

при любых x.

2. Найти целые k, при которых уравнения $\sin\left(\pi(2k+1)x\right)=0$ и $\sin\left(\pi(3k-2)x\right)=0$ имеют общий корень $x=4/7$.

3. Целые, положительные числа x, y и $x+y$ являются делителями числа $a=1944$. Найти наибольшее возможное значение из произведения $xy(x+y)$.

4. Найти значения a, при которых с вероятностью не меньшей $1/3$ можно утверждать, что уравнение $4ax^2-4\xi x+a\xi=0$ имеет на отрезке $[1;2]$ хотя бы один корень, где $\xi-$ случайная величина, принимающая значения $1;\,4;\,9$ с вероятностями $1/4;\,3/8;\,3/8$ соответственно.

5. При каких целых значениях a и b прямая с уравнением $ax+by=4$ касается окружности $(x-1)^2+(y-1)^2=1$?

6. На плоскости расположены три параллельные прямые L_1, L_2 и L_3 (прямая L_2 лежит в полосе между прямыми L_1 и L_2). Прямая L_2 удалена от прямых L_1 и L_3 на расстояния 1 и 2 соответственно. Окружности K_1 и K_2 касаются между собой, а также прямой L_2. Окружность K_1 касается также прямой L_1, а окружность K_2 - прямой L_3 .Найти радиус окружности K, касающейся внешним образом окружностей K_1 и K_2, а также одной из прямых L_1 или L_3.