Ответы и решения

1.Решение. Расстояние от дроби p/q до $8/17$ равно $d=\left|\frac{p}{q}-\frac{8}{17}\right|=\frac{1}{q}\left|p-\frac{8q}{17}\right|$. При фиксированном $q\in[6;14]$ подбираем целое p, ближайшее к $8/17$ и вычисляем d.

1) $q=6$: $d=\frac{1}{6}\left|p-\frac{48}{17}\right| \Rightarrow p=3,\ d=\frac{1}{34}$; 2) $q=7$: $d=\frac{1}{7}\left|p-\frac{56}{17}\right| \Rightarrow p=3,\ d=\frac{5}{119}$;

3) $q=8$: $d=\frac{1}{8}\left|p-\frac{64}{17}\right| \Rightarrow p=4,\ d=\frac{1}{34}$; 4) $q=9$: $d=\frac{1}{9}\left|p-\frac{72}{17}\right| \Rightarrow p=4,\ d=\frac{4}{153}$;

5) $q=10$: $d=\frac{1}{10}\left|p-\frac{80}{17}\right| \Rightarrow p=5,\ d=\frac{1}{34}$; 6) $q=11$: $d=\frac{1}{11}\left|p-\frac{88}{17}\right| \Rightarrow p=5,\ d=\frac{3}{187}$;

7) $q=12$: $d=\frac{1}{12}\left|p-\frac{96}{17}\right| \Rightarrow p=6,\ d=\frac{1}{34}$; 8) $q=13$: $d=\frac{1}{13}\left|p-\frac{104}{17}\right| \Rightarrow p=6,\ d=\frac{2}{221}$;

9) $q=14$: $d=\frac{1}{14}\left|p-\frac{112}{17}\right| \Rightarrow p=7,\ d=\frac{1}{34}$.

Наименьшее значение $d=\frac{2}{221}$ достигается при $p=6,\ q=13$. Искомая дробь равна $6/13$.

2. Решение. Сумма цифр числа A и чисел, полученных из A циклическими перестановками его цифр, равна $a+b+17$. После суммирования этих чисел (их всего 6) в каждом разряде числа B получается

$a+b+17$, поэтому $B=(a+b+17)\left(10^5+10^4+10^3+10^2+10+1\right)=(a+b+17)\cdot 111111.$ Так как $111111=3\cdot 7\cdot 11\cdot 13\cdot 37$, то B делится на 121 тогда и только тогда, когда $a+b+17$ делится на 11. Поскольку a и b цифры, то возможно всего два варианта: $a+b=5$ и $a+b=16$. Отсюда находим возможные наборы a и b: a=1, b =4; a=2, b =3; a=3, b =2; a=4, b =1; a=7, b =9; a=8, b =8; a=9, b =7. Таким образом, 7 чисел удовлетворяют условию задачи. Наибольшее число получим при a=9, b =7. Оно равно 796317.

3. Решение. Пусть $q(x)=ax+b$. Тогда

$$p^2(q(x))=(2q(x)+1)^2=4(ax+b)^2+4(ax+b)+1=4q^2(x)+4q(x)+1=4a^2x^2+(8ab+4a)x+4b^2+4b+1,$$

а

$$q(p^2(x))=a\left(4x^2+4x+1\right)+b=4ax^2+4ax+a+b.$$

По условию задачи $p^2(q(x))=q(p^2(x))$. Приравнивая коэффициенты при одинаковых степенях x, получаем систему:

$$\begin{cases} 4a^2 = 4a \\ 4ab + 4a = 4a \\ 4b^2 + 4b + 1 = a + b \end{cases} \quad \text{или} \quad \begin{cases} a^2 = a \\ ab = 0 \\ 4b^2 + 3b + 1 = a \end{cases}.$$

Из первого уравнения имеем a=1 или a=0. При a=0 получаем $4b^2 + 3b + 1 = 0$. Последнее уравнение не имеет решений. При a=1 находим b =0. Следовательно, $q(x) = x$.

4. Решение. Заметим, что возможные значения $НОД(6, n)$ это 1, 2, 3, 6, а возможные значения $НОД(8, n)$ − 1, 2, 4, 8. Их сумма, равная 10, возможна в двух случаях.

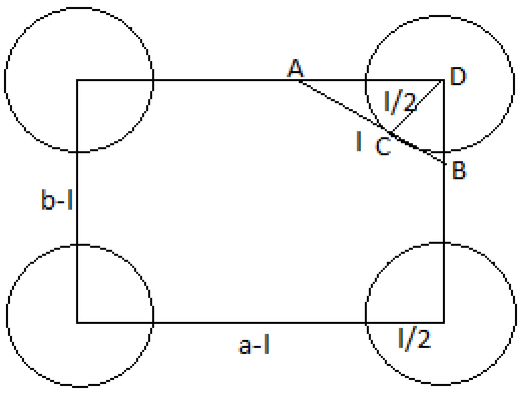
Случай 1. $\begin{cases} НОД(8, 2n) = 8 \\ НОД(6, n) = 2 \end{cases}$. Из первого уравнения получаем $n = 4k$, а из второго − $n = 2(3m+1)$ или $n = 2(3m+2)$. Обоим условиям удовлетворяют числа вида $n = 12t + 4,\ \ n = 12t + 8,\ \ t \in Z.$

Случай 2. $\begin{cases} НОД(8, 2n) = 4 \\ НОД(6, n) = 6 \end{cases}$. Из первого уравнения получаем $n = 2(2k+1)$, а из второго − $n = 6m.$

Обоим условиям удовлетворяют числа вида $n = 12t + 6, \quad t \in Z.$

Таким образом, равенство $\text{НОД}(6,n) + \text{НОД}(8,2n) = 10$ выполняется при $n = 12t + 4, n = 12t + 6, n = 12t + 8, t \geq 0, t \in Z.$

5. Решение. Из условий задачи (длина отрезка AB меньше длин сторон прямоугольника) следует**,** что точки A и B находятся либо на одной стороне прямоугольника, либо на соседних сторонах прямоугольника. Если точки A и B двигаются по одной стороне прямоугольника, точка C движется по прямолинейному отрезку. Если точки A и B находятся на соседних сторонах прямоугольника, то точка C движется по дуге окружности с центральным углом 90^0 и радиусом $l/2$, так как DC (см. рис.) является медианой прямоугольного треугольника, проведенной к гипотенузе (она равна половине гипотенузы).



При одном полном обороте точка C проходит четыре четверти окружности радиуса $l/2$ и дважды прямолинейные отрезки длины $a-l$ и $b-l$, соответственно. Следовательно за один полный оборот точка C проходит путь $s = 2\pi \cdot l/2 + 2(a-l) + 2(b-l) = 2(a+b) - l(4-\pi)$. Так как периметр прямоугольника равен $2(a+b)$, то $\Delta s = L(4-\pi)$.