Ответы и решения

1. Ответ: 1) $x=1$ для $m=5, n=2$; 2) $x=1{,}5$ для $m=3, n=5$; 3) $x=\log_2(\sqrt{33}-1)-1$ для $m=1, n=8$

Решение

Описание пар (m,n): $\begin{cases} m=1-2t>0 \\ n=3t+8>0, t\in Z \end{cases} \to t=-2,-1,0 \to r_m=2$ при всех допустимых t.

Случай 1. $t=-2\to m=5, n=2\to r_m=r_n=2\to 2^{2x}+2\cdot 2^x-8=0\to x=1$

Случай 2. $t=-1\to m=3, n=5\to r_m=0, r_n=2\to 2^{2x}=8\to x=1{,}5$

Случай 3. $t=0\to m=1, n=8\to r_m=1, r_n=2\to 2^{2x}+2^x-8=0\to x=\log_2(\sqrt{33}-1)-1$

2. Ответ: 1) $x=\dfrac{20(3k\pm 1)}{3}, k\in Z$; 2) $x=10k, k\in Z$

Решение

Преобразование:

$$\sin a_n x+\sin a_{n+1}x+\sin a_{n+2}x=2\sin\frac{a_n+a_{n+2}}{2}\cos dx+\sin a_{n+1}x=\sin a_{n+1}x\left(2\cos dx+1\right)=0$$

Случай 1.

$$\cos\frac{\pi x}{10}=-\frac{1}{2}\to\left[\begin{array}{l}\dfrac{\pi x}{10}=\dfrac{2\pi}{3}+2\pi k, k\in Z\\ \dfrac{\pi x}{10}=-\dfrac{2\pi}{3}+2\pi k, k\in Z\end{array}\right.\to\left[\begin{array}{l}x=\dfrac{20(3k+1)}{3}\\ x=\dfrac{20(3k-1)}{3}\end{array}\right.\to x=\frac{20(3k\pm 1)}{3}, k\in Z$$

Случай 2.

$$\sin a_{n+1}x=0\to a_{n+1}x=\pi m\to a_{n+1}=\frac{\pi m}{x}.$$

x не зависит от n, $m-$ целое число, a_n- арифметическая прогрессия, поэтому $m=An+B$ с целыми A и B

$$a_{n+1}=\frac{\pi}{x}(An+B)\to\frac{\pi A}{x}=d=\frac{\pi}{10}\to x=10A,$$

$$a_1=\frac{\pi}{x}B=\frac{\pi B}{10A}=\frac{\pi}{2}\to B=5A$$

С другой стороны, $a_{n+1}=\dfrac{\pi}{2}+\dfrac{\pi}{10}n=\dfrac{\pi}{10}(n+5)$ и $x=\dfrac{\pi m}{a_{n+1}}=\dfrac{\pi(An+5A)}{\dfrac{\pi}{10}(n+5)}=10A$, где $A-$ произвольное целое число.

3. Ответ: $C_{12}^3=220$

Решение

Пусть в записи числа используется k троек и m четверок, $m+k=12, m\ge 1, k\ge 1$

Тогда по признаку делимости на 9 сумма цифр числа должна быть кратна 9:

$\begin{cases} 3k+4m=9t \\ m+k=12,\ m\geq 1, k\geq 1 \end{cases}$. Заметим, что из первого уравнения $m=3s$, а из второго $k=3u$, поэтому

$$\begin{cases} 3u+4s=3t \\ s+u=4, s\geq 1, u\geq 1 \end{cases} \to \begin{cases} s=3v \to u+4v=t \\ s=3,\ u=1,\ v=1,\ t=5 \end{cases}$$

Итак, в записи искомых чисел участвуют 3 тройки и 9 четверок. Надо разместить различными вариантами 3 тройки на имеющихся 12 позициях, остальные места займут четверки. Число таких вариантов $C_{12}^{3}=220$.

4. Ответ: $P(A)=\dfrac{1285}{9000}=\dfrac{257}{1800}$

Решение.

Всякое целое число A, делящееся на 14 и оканчивающееся на 2, имеет вид $A=14(5k+3),\ k\geq 0, k\in Z$. Если оно оканчивается на 32, то его можно представить в виде $A=100m+32, m\geq 0, m\in Z$. Объединяя два этих условия, приходим к уравнению $100m+32=70k+42 \to 10m-7k=1$.

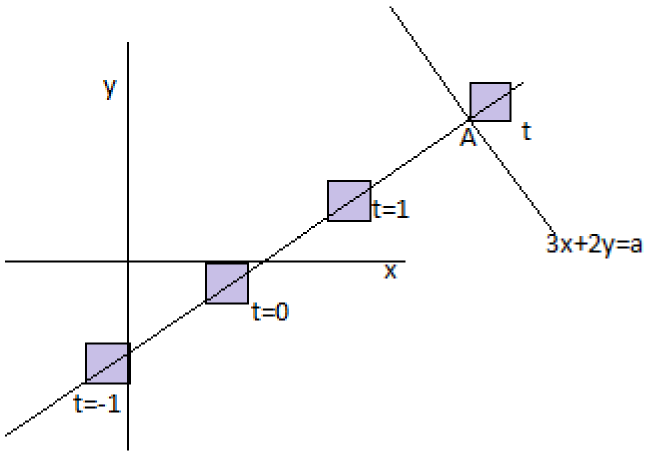
Его общее решение $\begin{cases} m=5+7t \\ k=7+10t \end{cases}, t\geq 0, t\in Z$. Тогда выбранное число, оканчивающееся на 32 и делящееся на 14, имеет вид $A=700t+532$. Количество таких шестизначных таких чисел определяется неравенством $100000\leq 700t+532\leq 999999 \to t=143,144,...,1427$. Всего 1285 чисел (число благоприятных событий). Общее число шестизначных чисел, оканчивающихся на 32 равно 9000 (общее число опытов). Поэтому искомая вероятность $P(A)=\dfrac{1285}{9000}=\dfrac{257}{1800}$.

5. Ответ: $a=13t+4, t\in Z$

Решение

Первое уравнение системы – линейное уравнение с целыми решениями, поэтому $\begin{cases} [x]=3t+2 \\ [y]=2t-1, t\in Z \end{cases}$.

Тогда для каждого $t\in Z$ решениями первого уравнения являются пары $(x;y)$, для которых $x\in[3t+2;3t+3), y\in[2t-1;2t)$ (квадраты со стороной 1)



Пусть A вершина квадрата с координатами $A(3t+2;2t-1)$, соответствующими целому решению первого уравнения системы. Значение a, при котором прямая $3x+2y=a$ проходит через точку A искомое: $a=3(3t+2)+2(2t-1)=13t+4, t\in Z$

Задача 6 Ответ: $S_{EABMN}:S_{EABCD}=\dfrac{(x+1)^2(\cos\alpha+\cos\beta)}{4(1+\cos\alpha)}=\dfrac{25(\sqrt{13}+1)\sqrt{2}}{36(\sqrt{26}+1)}$

$$x=\frac{2}{3}; tg\beta=1; \cos\alpha=\frac{1}{\sqrt{26}}; \cos\beta=\frac{1}{\sqrt{2}}; \frac{\cos\alpha+\cos\beta}{1+\cos\alpha}=\frac{\sqrt{13}+1}{\sqrt{26}+1}; \frac{(x+1)^2}{4}=\frac{25}{36}$$

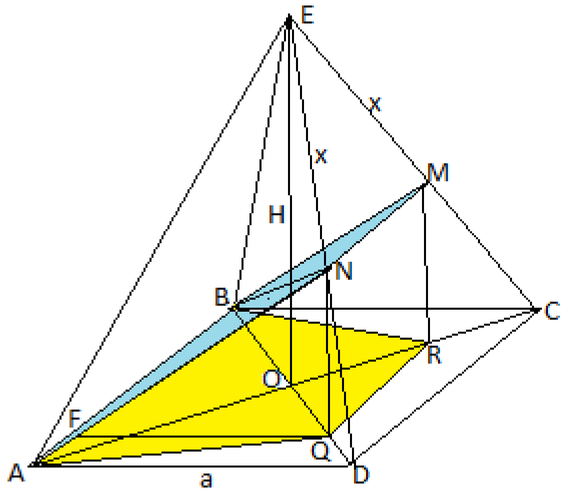
6. $\lambda=5:9, \alpha=arctg5$

$$x=\frac{2}{3}; tg\beta=1; \cos\alpha=\frac{1}{\sqrt{26}}; \cos\beta=\frac{1}{\sqrt{2}}; \frac{\cos\alpha+\cos\beta}{1+\cos\alpha}=\frac{\sqrt{13}+1}{\sqrt{26}+1}; \frac{(x+1)^2}{4}=\frac{25}{36}$$

Ответ: $S_{EABMN}:S_{EABCD}=\dfrac{(x+1)^2(\cos\alpha+\cos\beta)}{4(1+\cos\alpha)}=\dfrac{25(\sqrt{13}+1)\sqrt{2}}{36(\sqrt{26}+1)}$

Решение

Обозначение $EM:EC=EN:ED=x$, $V=V_{EABCD}, S=S_{EABCD}, \sigma=S_{EAB}, \omega=S_{ABCD}, H=EO, a=AB$



$$V_{EABN}=x\cdot\frac{V}{2},V_{EBMN}=x^2\cdot\frac{V}{2}\to V_{EABMN}=\frac{V}{2}\left(x+x^2\right)\to\frac{x+x^2}{2}=\lambda\in\left[0,1\right]\to x^2+x-2\lambda=0,\ x\in\left[0,1\right]$$

$\beta-$ угол наклона плоскости P к плоскости основания.

$$tg\beta=\frac{QN}{QF},\frac{QN}{H}=(1-x)\to QN=(1-x)H;\ \frac{QF}{a}=\frac{BQ}{a\sqrt{2}}=\frac{a\sqrt{2}-QD}{a\sqrt{2}}=1-\frac{QD}{a\sqrt{2}};$$

$$\frac{2QD}{a\sqrt{2}}=(1-x)\to QD=\frac{(1-x)a}{\sqrt{2}}\to QF=\frac{(x+1)a}{2}\to tg\beta=\frac{2(1-x)H}{(x+1)a}=\frac{1-x}{x+1}tg\alpha$$

$$S_{ABMN}=S_{ABRQ}/\cos\beta,\ S_{ABRQ}=2x\cdot\frac{\omega}{4}+x^2\cdot\frac{\omega}{4}+\frac{\omega}{4}=\frac{\omega}{4}(x+1)^2\to S_{ABMN}=\frac{\omega(x+1)^2}{4\cos\beta}$$

$$S_{EABMN}(полная)=S_{EABMN}(бок)+S_{ABMN};\ S_{EABMN}(бок)=2x\sigma+x^2\sigma+\sigma=\sigma(x+1)^2$$

$$S_{EABMN}=\sigma(x+1)^2+\frac{\omega(x+1)^2}{4\cos\beta}=(x+1)^2\frac{4\sigma\cos\beta+\omega}{4\cos\beta}$$

Поскольку $\omega=4\sigma\cos\alpha$, приходим к соотношению

$$S_{EABMN}=(x+1)^2\frac{4\sigma\cos\beta+4\sigma\cos\alpha}{4\cos\beta}=(x+1)^2\sigma\cdot\frac{\cos\alpha+\cos\beta}{\cos\beta}$$

$S_{EABCD}(полная)=4\sigma+\omega=\dfrac{\omega}{\cos\alpha}+\omega=\omega\cdot\dfrac{1+\cos\alpha}{\cos\alpha}=4\sigma(1+\cos\alpha)$ и искомое отношение полных поверхностей пирамид

$$S_{EABMN}:S_{EABCD}=\frac{(x+1)^2(\cos\alpha+\cos\beta)}{4(1+\cos\alpha)}$$

Ответы и решения

1. Ответ: $n=1,2,3,4,6,12$

Решение

Преобразование уравнения:

$1+3+5+...+(2n-1)=n^2 \to n^2\log_2 x=5040=2^4\cdot 3^2\cdot 5\cdot 7$

Уравнение имеет рациональное решение, если 5040 делится на n^2 нацело. Это бывает при $n=2,4,3,6,12$

2. Ответ: 1) $\left(|x|+|y|+|z|\right)_{\max}=\pi$; 2) шесть троек $(x;y;z)=\pm\left(\frac{\pi}{3};\frac{\pi}{3};\frac{\pi}{3}\right),\pm\left(\frac{\pi}{3};-\frac{\pi}{3};\pm\frac{\pi}{3}\right)$

Решение.

Выражение $|x|+|y|+|z|\le\pi$, для всех троек $(x;y;z))$, удовлетворяющих второму уравнению системы (на сфере), поскольку любая из плоскостей $\pm x\pm y\pm z=a$ при $a>\pi$ удалена от начала координат на расстояние большее, чем $\frac{\pi}{\sqrt{3}}$ и со сферой общих точек не имеет. Если x,y,z одного знака, то плоскости $x+y+z=\pm\pi$ касаются сферы в точках $\left(\frac{\pi}{3};\frac{\pi}{3};\frac{\pi}{3}\right)$ и $\left(-\frac{\pi}{3};-\frac{\pi}{3};-\frac{\pi}{3}\right)$, а их координаты удовлетворяют первому уравнению системы. Если знаки x и y противоположны, то четыре плоскости $x-y\pm z=\pm\pi$ также касаются сферы в четырех точках $\pm\left(\frac{\pi}{3};-\frac{\pi}{3};\pm\frac{\pi}{3}\right)$, координаты которых удовлетворяют первому уравнению. Если x и y одного знака, то значение выражения $|x|+|y|+|z|$, равное π, возможно в двух точках $\pm\left(\frac{\pi}{3};\frac{\pi}{3};-\frac{\pi}{3}\right)$, координаты которых не удовлетворяют первому уравнению системы.

3. Ответ: $r=6, r=12$

Решение. $a=18m+r, 1\le r\le 17$

Число $2a^2-3a=2(18m+r)^2-3(18m+r)=18k+2r^2-3r$ делится на 18, если $2r^2-3r=18t, t\in Z\to t=\frac{r(2r-3)}{18}$ целое число. Поскольку $2r-3$ число нечетное, число r должно быть четным

$r=2k, 1\le k\le 8$. Тогда $t=\frac{k(4k-3)}{9}$ - целое число.

Случай 1. $k=3m, m=1,2$

$t=\dfrac{m(12m-3)}{3}=m(4m-1)$ целое при $m=1$ и $m=2$, поэтому годятся $k=3$ и $k=6$. Тогда допустимое значение остатков $r=6$ и $r=12$

Случай 2. $4k-3=9s\rightarrow 9s-4k=-3\rightarrow\begin{cases} s=1+4u \\ k=3+9u,\ u\in Z\end{cases}$.

Поскольку в этом случае k делится на 3 (случай 1), никаких новых решений для r не возникает.

4. Ответ: $P(A)=\dfrac{3}{7}$

Решение

Площадь сечения плоскостью, содержащей хотя бы три вершины куба, принимает три возможных значения. Первое $s_1=\dfrac{a^2\sqrt{3}}{2}$, если ни какие две вершины не принадлежат одному ребру куба (правильный треугольник со стороной $a\sqrt{2}$). В первом варианте $a=2$, поэтому $s_1=2\sqrt{7}\approx 3,46$.

Второе значение площади $s_2=a^2$ реализуется в случае, когда три вершины лежат в одной грани. В первом варианте $s_2=4$. Третье значение $s_3=a^2\sqrt{2}$ реализуется в случае, когда две вершины принадлежат одному ребру, а третья вершина не лежит в грани, которой это ребро принадлежит. В первом варианте $s_3=4\sqrt{2}\approx 5,65$. Таким образом, в условии варианта 1 говорится о вероятности того, что будет реализовано s_3.

Общее число различных троек вершин, через которые может проходить плоскость сечения, равно $n=C_8^3=\dfrac{8\cdot 7\cdot 6}{2\cdot 3}=56$. Если фиксировать одну из восьми вершин куба, то существует единственная тройка вершин (включая выбранную вершину), которой соответствует площадь s_1. Таким образом, число благоприятствующих этому событию троек равно $m_1=8$. Если фиксировать одну из 6 граней, то число различных троек вершин, реализующих s_2 равно $C_4^3=4$. Таким образом, число различных троек, благоприятствующих s_2 равно $m_2=4\cdot 6=24$. Если фиксировать пару параллельных ребер, не лежащих в одной грани (таких пар 6), то число различных троек вершин, благоприятствующих s_3 равно $C_4^3=4$, поэтому общее число троек благоприятствующих этому событию равно $m_3=6\cdot 4=24$. Вероятность искомого события равна $P(A)=\dfrac{m_3}{n}=\dfrac{24}{56}=\dfrac{3}{7}$.

5. Ответ: $n=4m+1,\ m\in Z$

Решение.

Из первого условия $\cos\left(n^2\pi+\frac{(n+1)\pi}{2}\right)=1\to(-1)^{n^2}\cos\left(\frac{(n+1)\pi}{2}\right)=1$. Если $\cos\left(\frac{(n+1)\pi}{2}\right)=1$, то $\frac{(n+1)\pi}{2}=2\pi m\to n=4m-1, m\in Z$. Тогда $(-1)^{n^2}=-1, \forall m$ и уравнение решений не имеет.

Если $\cos\left(\frac{(n+1)\pi}{2}\right)=-1\to\frac{(n+1)\pi}{2}=\pi(2m+1)\to n=4m+1\to(-1)^{n^2}=-1, \forall m\in Z$. Таким образом, допустимы для второго уравнения $n=4m+1$.

Каждый из синусов левой части уравнения по модулю равен 1.

Случай 1. $\sin x=1$

$x=\frac{\pi}{2}+2\pi k, k\in Z\to 5x=\frac{5\pi}{2}+10\pi k\to\sin 5x=1$ для всех k

Тогда $\sin(4m+1)x=1\to\sin\,(4m+1)\left(\frac{\pi}{2}+2\pi k\right)=\sin\frac{(4m+1)\pi}{2}=\sin(2\pi m+\frac{\pi}{2})=1, \forall m\in Z$

Таким образом, $n=4m+1$ входит в ответ.

Случай 2. $\sin x=-1$

$x=-\frac{\pi}{2}+2\pi k, k\in Z\to 5x=-\frac{5\pi}{2}+10\pi k\to\sin 5x=-1$

Произведение синусов в левой части уравнения равно 1, если $\sin nx=1$

$\sin(4m+1)x=\sin\left(4m+1\right)\left(-\frac{\pi}{2}+2\pi k\right)=\sin\left(2m\pi-\frac{\pi}{2}\right)=-1, \forall m$

Таким образом, в случае 2 решений нет.

6. Ответ: $L_{\max}=\frac{55}{6}$

Вариант 0

Две параллельные прямые, расстояние между которыми h, пересекают прямоугольник размерами $a\times b$ под углом α к его стороне. Найти максимальное возможное значение суммы длин отрезков этих прямых, принадлежащих прямоугольнику.

Решение. Для определенности на рис. $a\le b$.

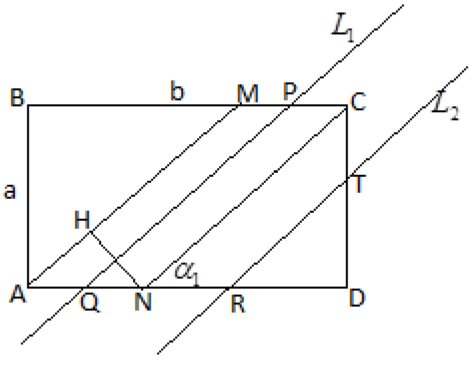


Рис 1

На рис 1 проведены отрезки AM и CN под углом α_1 к стороне AD. Значение α_1 определяется условием того, что расстояние между прямыми AM и CN равно h:

$AN = b - a \cdot ctg\alpha_1,\ HN = AN\sin\alpha_1 \to (b - a \cdot ctg\alpha_1)\sin\alpha_1 = h \to b\sin\alpha_1 - a\cos\alpha_1 = h$ (*)

Случай 1. Прямые L_1 и L_2 образуют угол α со стороной AD, $\alpha \in \left[\alpha_1; \frac{\pi}{2}\right]$

При фиксированном α максимальное значение суммы $L = l_1 + l_2$ длин отрезков PQ и RS равно $2CN = \frac{2a}{\sin\alpha}$ потому, что расстояние между прямыми AM и CN не меньше h и на отрезке MC можно разместить точки P и T прямых L_1 и L_2.

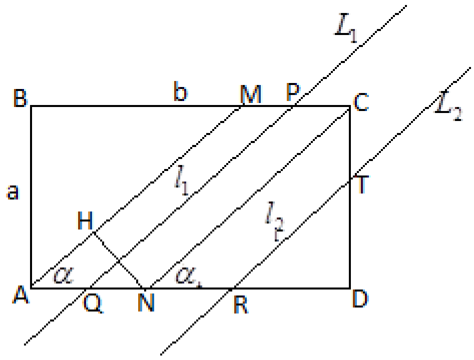


Рис 2

Максимальное значение L на отрезке $\alpha \in \left[\alpha_1; \frac{\pi}{2}\right]$ соответствует минимальному углу, т.е. $\alpha = \alpha_1$, определяемому уравнением (*), $L_{1,\max} = \frac{2a}{\sin\alpha_1} = \frac{2a(a^2+b^2)}{a\sqrt{a^2+b^2-h^2}+bh}$

Случай 2. Прямые L_1 и L_2 образуют угол α со стороной AD, $\alpha \in [\alpha_2; \alpha_1)$, $\alpha_2 = \arcsin\frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}$

В этом случае, расстояние между прямыми AM и CN меньше h, при $\alpha = \alpha_2$ оно равно нулю.

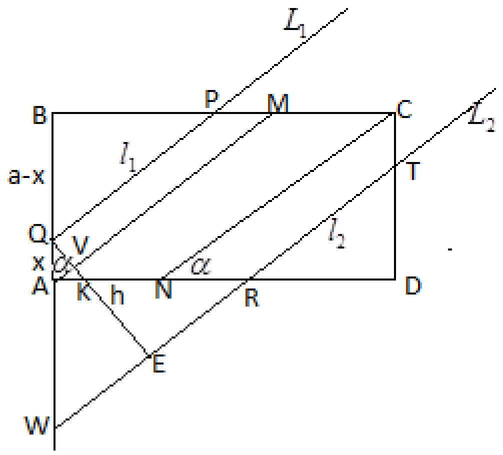


Рис 3

Положение точки Q на стороне AB характеризуется параметром x - длиной отрезка AQ.

Тогда из подобия треугольников $\dfrac{l_1}{AM}=\dfrac{a-x}{a}\to l_1=\dfrac{a-x}{a}\cdot AM=\dfrac{a-x}{a}\cdot\dfrac{a}{\sin\alpha}=\dfrac{a-x}{\sin\alpha}$.

Найдем зависимость l_2 от x:

$$QE=h,\ AK=xtg\alpha,\ QK=\frac{x}{\cos\alpha},\ \ KE=h-QK=h-\frac{x}{\cos\alpha},\ \ KR=\frac{KE}{\sin\alpha}=\frac{h\cos\alpha-x}{\cos\alpha\sin\alpha}$$

$$AR=AK+KR=xtg\alpha+\frac{h\cos\alpha-x}{\sin\alpha\cos\alpha}=-\frac{x\cos\alpha}{\sin\alpha}+\frac{h}{\sin\alpha},\ \ RD=b-AR=\frac{b\sin\alpha+x\cos\alpha-h}{\sin\alpha}$$

Наконец, $l_2=\dfrac{RD}{\cos\alpha}=\dfrac{b\sin\alpha+x\cos\alpha-h}{\sin\alpha\cos\alpha}$

Тогда при фиксированном $\alpha\in[\alpha_2;\alpha_1),\ \alpha_2=\arcsin\dfrac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}$ величина

$$L=l_1+l_2=\frac{a-x}{\sin\alpha}+\frac{b\sin\alpha+x\cos\alpha-h}{\sin\alpha\cos\alpha}=\frac{a\cos\alpha+b\sin\alpha-h}{\sin\alpha\cos\alpha}\quad (**)$$

не зависит от x, но зависит от α.

Замечание. Если прямые составляют угол α с меньшей стороной $(a>b)$, то в формулах (*) и (**) надо поменять буквы местами.

В варианте 1 $a=3, b=5, tg\alpha=\dfrac{3}{4}, \sin\alpha=\dfrac{3}{5}, \cos\alpha=\dfrac{4}{5}, h=1$

Для случая, когда прямые составляют угол α с большей стороной, уравнение (*) для определения α_1 имеет вид:

$$5\sin\alpha_1-3\cos\alpha_1=1\to\alpha_1=arctg\frac{3}{5}+arctg\frac{1}{\sqrt{33}}\to tg\alpha_1=\frac{3/5+1/\sqrt{33}}{1-3/\left(5\sqrt{33}\right)}=\frac{3\sqrt{33}+5}{5\sqrt{33}-3}$$

Сравниваем значения $tg\alpha$ и $tg\alpha_1$ для выяснения в каком из интервалов $\left[arctg\dfrac{3}{5};\alpha_1\right]$ или $\left[\alpha_1;\dfrac{\pi}{2}\right]$ находится заданное α:

$$\frac{3\sqrt{33}+5}{5\sqrt{33}-3}\vee\frac{3}{4}\to 12\sqrt{33}+20\vee 15\sqrt{33}-9\to 29\vee 3\sqrt{33}\to 841>297,\quad \text{т.е.}\ tg\alpha_1>tg\alpha\to\alpha\in\left[arctg\frac{3}{5};\alpha_1\right]$$

и имеет место случай 1. Тогда L определяется формулой (**)

$$L_2=\frac{3\cdot\frac{4}{5}+5\cdot\frac{3}{5}-1}{\frac{4}{5}\cdot\frac{3}{5}}=\frac{55}{6}.$$

Случай, когда прямые составляют угол α с меньшей стороной,

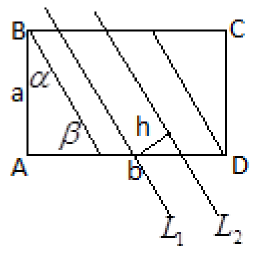


Рис 4

преобразуется в рассмотренный случай заменой угла α на угол $\beta = \dfrac{\pi}{2} - \alpha$, который образуют прямые с большей стороной. Поскольку $tg\beta_1 = \dfrac{3\sqrt{33}+5}{5\sqrt{33}-3} < tg\beta = \dfrac{4}{3} \to ctg\alpha_1 < ctg\alpha \to tg\alpha_1 > tg\alpha$.

Поэтому для заданного угла реализуется случай 1 и $L_1 = \dfrac{2a}{\sin\beta} = \dfrac{2a}{\cos\alpha} = \dfrac{6}{4/5} = \dfrac{15}{2}$.

Поскольку $L_2 = \dfrac{55}{6} > L_1 = \dfrac{15}{2}$, ответом является L_2 .

Ответы и решения

1. Ответ: $x=2^{17+3t}, y=3^{13-2t}, t\in Z$

Решение

Если $\log_{\sqrt{2}} x=\dfrac{p}{q}$ – несократимая дробь, $q\neq 1$, то $x=2^{\frac{p}{2q}}$ может быть рациональным только в случае, когда $\dfrac{p}{2q}=k$ - целое число. Тогда $p=2kq$ и p делится на q, а дробь $\dfrac{p}{q}$ сократимая. Таким образом, $q=1$ и $p=2k=\log_{\sqrt{2}} x, k\in Z$.Тогда $x=2^k$. Аналогично, $\log_{\sqrt[3]{3}} y=3m, m\in Z$ и $y=3^m$.

Уравнение в целых числах $2k+3m=73$ имеет решения $\begin{cases} k=17+3t \\ m=13-2t,\ t\in Z\end{cases}$ и $x=2^{17+3t}, y=3^{13-2t}$.

2. Ответ: 1) $n=1+6t, t\geq 0, t\in Z$ 2) $n=3+6t, t\geq 0, t\in Z$

Решение

$$\begin{cases} \cos\pi x\geq 0 \\ 10\cos^2(\pi x)=4\cos(\pi x)-\cos(2\pi x)\end{cases} \to \begin{cases} \cos\pi x\geq 0 \\ 12\cos^2(\pi x)-4\cos(\pi x)-1=0\end{cases} \to \cos(\pi x)=\frac{1}{2}$$

Номера n членов прогрессии искомые, если найдется k , для которых $\dfrac{5n+2}{3}=\pm\dfrac{1}{3}+2k,\ k\in Z$.

1. $5n-6k=1\to\begin{cases} n=-1+6t, \\ k=-1+5t,\ t\geq 1,\ t\in Z\end{cases}$ 2. $5n-6k=-3\to\begin{cases} n=3+6t, \\ k=3+5t,\ t\geq 0,\ t\in Z\end{cases}$

3. Ответ: $\hat{a}_{\max}=9^2\cdot 11^2\cdot 10^8$

Решение

Пусть m_1 и m_2 - сумма цифр в записи чисел a_1 и a_2 соответственно. По условию, $m_1+m_2=36$.

Обозначим через r_1 и r_2 остатки от деления m_1 и m_2 на 9, т.е. $m_1=9k_1+r_1,\ m_2=9k_2+r_2$.

Тогда $9(k_1+k_2)+r_1+r_2=36$ и r_1+r_2 делится на 9. С учетом того, что r_1 и r_2 остатки возможны два случая.

Случай 1. $r_1=r_2=0\to k_1+k_2=4$, $k_1=1,2,3$

Если $m_1=9k_1$ и $m_2=9k_2$ фиксированы, то максимальное $\hat{a}_1=\underbrace{99...9}_{k_1}\underbrace{0...0}_{6-k_1}=\left(10^{k_1}-1\right)\cdot 10^{6-k_1}$ и максимальное $\hat{a}_2=\underbrace{99...9}_{k_2}\underbrace{0...0}_{6-k_2}=\left(10^{k_2}-1\right)\cdot 10^{6-k_2}$ дают максимальное произведение

$$\hat{a}=10^8\left(10^{k_1}-1\right)\left(10^{k_2}-1\right).$$

При $k_1=1, k_2=3\to(10-1)\left(10^3-1\right)=9\cdot 999=9^2\cdot 111$.

При $k_1=k_2=2\to(10^2-1)(10^2-1)=99\cdot 99=81\cdot 121$.

Для случая 1 $\hat{a}_{\max} = 9^2 \cdot 11^2 \cdot 10^8$

Случай 2. $r_1 + r_2 = 9 \to k_1 + k_2 = 3,\ k_1 = 1,2$

При фиксированных $m_1 = 9k_1 + r_1$ и $m_2 = 9k_2 + r_2$ максимальное значение

$$\hat{a}_1 = \underbrace{99...9}_{k_1} r_1 \underbrace{0...0}_{5-k_1} = (10^{k_1} - 1) \cdot 10^{6-k_1} + r_1 \cdot 10^{5-k_1} = 10^6 - 10^{5-k_1}(10 - r_1) = 10^{5-k_1}(10^{k_1+1} - 10 + r_1),$$

И максимальное $\hat{a}_2 = 10^6 - 10^{5-k_2}(10 - r_2) = 10^{5-k_2}(10^{k_2+1} - 10 + r_2)$. Тогда их произведение

$$\hat{a} = 10^7 \left(10^{k_1+1} - 10 + r_1\right)\left(10^{k_2+1} - 10 + r_2\right)$$

Достаточно рассмотреть только случай $k_1 = 1,\ k_2 = 2$ (по симметрии)

$$\hat{a} = 10^7 \left(10^2 - 10 + r_1\right)\left(10^3 - 10 + r_2\right) = 10^7 \left(90 + r_1\right)(990 + r_2) = 10^7 (90 + r_1)(999 - r_1)$$

Наибольшее значение квадратного трехчлена достигается при $r_1 = 9$

$$\hat{a}_{\max} = 10^7 \cdot 99 \cdot 990 = 10^8 \cdot 9^2 \cdot 11^2$$

4. Ответ: $P(A) = \dfrac{1}{12}$

Решение

Пусть $p_k, k = 1,2,3,4,5 -$ вероятность того, что кость закроет цифру k при одном бросании.

Пусть $\sigma -$ площадь боковой грани, $\omega -$ площадь основания, $4\sigma \cos\alpha = \omega$,

$p_1 = p_2 = p_3 = p_4 = \lambda\sigma,\ p_5 = \lambda\omega$

По условию, $\dfrac{p_4}{p_5} = \dfrac{\sigma}{\omega} = \dfrac{1}{4\cos\alpha} \to p_5 = 4\cos\alpha\, p_4$. Условие нормировки:

$$4p_1 + p_5 = 1 \to 4p_1 + 4\cos\alpha\, p_1 = 1 \to p_1 = \frac{1}{4(1+\cos\alpha)},\ p_5 = \frac{\cos\alpha}{(1+\cos\alpha)}$$

Событие «сумма цифр равна 13» реализуется, если 1) закрыты две пятерки и одна тройка;
2) одна пятерка и две четверки

$$P(A_1) = C_3^2 p_5^2 p_4 = \frac{3\cos^2\alpha}{4(1+\cos\alpha)^3};\ P(A_2) = C_3^2 p_4^2 p_5 = \frac{3\cos\alpha}{16(1+\cos\alpha)^3}$$

$$P(A) = \frac{3\cos\alpha\left(4\cos\alpha + 1\right)}{16(1+\cos\alpha)^3}$$, при $\alpha = 60^0 \to P(A) = \dfrac{1}{12}$

5. Ответ: $n \geq 11$

Решение

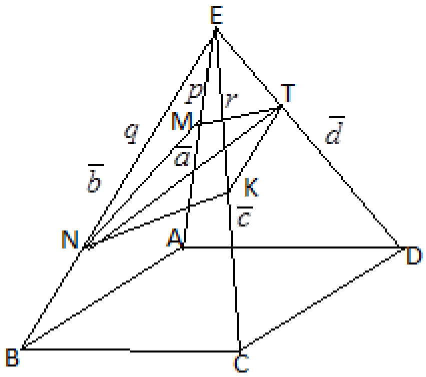
Заметим, что если $\tilde{n}$ - наименьшее n, при котором уравнение имеет на отрезке $\left[0;\pi/4\right]$ не менее 10 решений, то для всех $n > \tilde{n}$ количество решений на отрезке не уменьшается.

$$\sin nx = 0 \to nx = \pi k \to x = \frac{\pi k}{n} \le \frac{\pi}{4} \to 0 \le 4k \le n$$

Для $n = 1, 2, 3$ уравнение имеет единственное решение $x = 0$. Для $n = 4, 5, 6, 7, 8$ добавляется по одному новому решению, т.е. при $n = 8$ уравнение имеет 6 различных решений. При $n = 9$ добавляется два новых решения $x = \frac{\pi}{9}, \frac{2\pi}{9}$, т.е. при $n = 9$ уравнение имеет 8 решений. При $n = 10$ добавляется одно новое решение $x = \frac{\pi}{10}$. При $n = 11$ добавляется два решения $x = \frac{\pi}{11}, \frac{2\pi}{11}$, поэтому $\tilde{n} = 11$.

6. Ответ: $5:58$

Решение



Обозначения: $\bar{a} = \overline{EA}, \bar{b} = \overline{EB}, \bar{c} = \overline{EC}, T -$ точка пересечения плоскости с ребром $ED, \bar{d} = \overline{ED}$.

Тогда $\overline{EM} = p\bar{a}, \overline{EN} = q\bar{b}, \overline{EK} = r\bar{c}, \overline{ET} = z\bar{d}$. Если найти z, то

$$V_{EMNK} = pqr \cdot V_{EABC} = \frac{1}{2} pqr \cdot V_{EABCD}, V_{EMKT} = prz \cdot V_{EACD} = \frac{1}{2} prz \cdot V_{EABCD} \to$$

$$\to V_{EMNKT} = \frac{1}{2} pr(q+z) \cdot V_{EABCD}$$

Вычисление z:

$$\bar{d} = \bar{b} + \overline{BD} = \bar{b} + \overline{BA} + \overline{BC} = \bar{b} + (\bar{a} - \bar{b}) + (\bar{c} - \bar{b}) = \bar{a} - \bar{b} + \bar{c}$$

$$\overline{NM} = p\bar{a} - q\bar{b},\ \overline{NK} = r\bar{c} - q\bar{b}, \exists x, y > 0 : \overline{NT} = x \cdot \overline{NM} + y \cdot \overline{NK}$$

$$\overline{ET} = z\bar{d} = z\bar{a} - z\bar{b} + z\bar{c} = q\bar{b} + \overline{NT} = q\bar{b} + x \cdot \left(p\bar{a} - q\bar{b}\right) + y \cdot \left(r\bar{c} - q\bar{b}\right) = xp\bar{a} + \left(q - qx - qy\right)\bar{b} + yr\bar{c}$$

Тогда, сравнивая коэффициенты при $\bar{a}, \bar{b}, \bar{c}$, получим систему

$$\begin{cases} xp = z \\ q\left(1 - x - y\right) = -z \to z\left(\frac{1}{p} + \frac{1}{r} - \frac{1}{q}\right) = 1 \to z = \left(\frac{1}{p} + \frac{1}{r} - \frac{1}{q}\right)^{-1} \\ yr = z \end{cases}$$

Условием принадлежности точки T ребру ED является неравенство $0 \le z \le 1 \to \frac{1}{p} + \frac{1}{r} - \frac{1}{q} \ge 1$

Вариант 1. $p=\frac{1}{2}$, $q=\frac{2}{3}$, $r=\frac{1}{3}$, $z=\frac{2}{7}$ $V_{EMNKT}=\frac{1}{2}pr(q+z)\cdot V_{EABCD}=\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{3}\left(\frac{2}{3}+\frac{2}{7}\right)V_{EABCD}=\frac{5}{63}V_{EABCD}$

Ответ: $5:58$

Ответы и решения

1. Ответ: $f_{\max} = 6$

Решение

$$z = 27 - x - y \to f = \log_3 x + \log_3 y + \log_3 (27 - x - y)$$

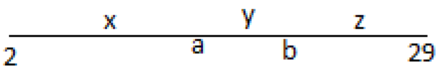


Рис 1

На рис изображено расположение точек a и b, дающее максимальное значение f при $x = x^*, y = y^*, z^* = 27 - x^* - y^*$. Если изменить положение точки a, при этом точку b не менять, то функция $f(x, y^*)$ имеет максимум в точке $x = x^*$, поэтому

$$f'(x, y^*) = \frac{1}{\ln 3}\left(\frac{1}{x} - \frac{1}{27 - x - y^*}\right)\Bigg|_{x = x^*} = 0 \to \frac{1}{x^*} - \frac{1}{27 - x^* - y^*} = 0$$

Аналогично, зафиксировав положение точки a и, изменяя точку b, приходим у тому, что функция $f(x^*, y)$ имеет максимум при $y = y^*$ и ее производная в этой точке равна нулю.

$$f'(x^*, y) = \frac{1}{\ln 3}\left(\frac{1}{y} - \frac{1}{27 - x^* - y}\right)\Bigg|_{y = y^*} = 0 \to \frac{1}{y^*} - \frac{1}{27 - x^* - y^*} = 0$$

Решая совместно систему, приходим к тому, что $x^* = y^* = z^* = 9$ и $f_{\max} = 3\log_3 9 = 6$

2. Ответ: $x = \pm\frac{\pi}{6} + \pi k,\ x = \frac{\pi}{2} + \pi k,\ k \in Z$

Решение

Преобразование:

$$\cos\left(\arcsin\left(\sin x\right)\right) = \cos\left(\frac{\pi}{2} - \arccos\left(\cos 2x\right)\right) = \cos\left(\arcsin\left(\cos 2x\right)\right)$$

1. $\arcsin(\sin x) = \arcsin(\cos 2x) + 2\pi k,\ k \in Z$. Заметим, что $\left|\arcsin\alpha - \arcsin\beta\right| \le \pi$ для любых допустимых α, β, т.е. равенство возможно только $k = 0$. С учетом монотонности арксинуса

$$\arcsin(\sin x) = \arcsin(\cos 2x) \to \sin x = \cos 2x \to 2\sin^2 x + \sin x - 1 = 0 \to \left[\begin{array}{l} \sin x = 1/2 \\ \sin x = -1 \end{array}\right.$$

Тогда решениями уравнения являются $x_1 = (-1)^n \frac{\pi}{6} + \pi n,\ \ x_2 = -\frac{\pi}{2} + 2\pi n, n \in Z$.

2. $\arcsin(\sin x) = -\arcsin(\cos 2x) + 2\pi k,\ k \in Z$. По тем же причинам $k = 0$ и в силу нечетности арксинуса $\sin x = -\cos 2x \to 2\sin^2 x - \sin x - 1 = 0 \to \left[\begin{array}{l} \sin x = -1/2 \\ \sin x = 1 \end{array}\right.$.

Тогда решениями уравнения являются $x_3 = (-1)^{n+1}\dfrac{\pi}{6} + \pi n,\ x_4 = -\dfrac{\pi}{2} + 2\pi n,\ n \in Z$.

Объединение серий дает ответ $x = \pm\dfrac{\pi}{6} + \pi k,\ x = \dfrac{\pi}{2} + \pi k,\ k \in Z$

3. Ответ 1) $x = 4,\ y = 11$ 2) $x = 7,\ y = 16$

Решение

Разложение на множители $1232 = 2^4 \cdot 7 \cdot 11$.

Решение уравнения $5x - 3y + 13 = 0 \to \begin{cases} x = 3t - 2 \\ y = 5t + 1,\ 1 \le t \le 246,\ t \in Z \end{cases}$

Числа $x \ne 1$ и $y \ne 1$ взаимно простые и каждое из них делится на одно из чисел 2, 7 или 11.

Случай 1. $x = 2k -$ четное число.

$$3t - 2 = 2k \to 3t = 2(k+1) \to \begin{cases} t = 2s \\ k = 3s - 1 \end{cases} \to \begin{cases} x = 2(3s-1) \\ y = 10s + 1,\ 1 \le s \le 123 \end{cases}$$

Число y должно быть делителем числа 1232, и быть нечетным. Таких делителей три 7, 11, 77 и только одному, 11 соответствует $s = 1$ и решения $x = 4,\ y = 11$.

Случай 2. $x = 7m$

$$3t - 2 = 7m \to 3t - 7m = 2 \to \begin{cases} t = 3 + 7s \\ m = 1 + 3s \end{cases} \to \begin{cases} x = 7(3s+1) \\ y = 35s + 16,\ 0 \le s \le 34 \end{cases}$$

Число $y \ge 16$ является делителем числа 1232 и не делится на 7, т.е. может принимать одно из значений: 16, 22, 44, 88, 176. Последние четыре не реализуются, поскольку после вычитания 16 не делятся на 35. А делителю 16 соответствует $s = 0$ и решения $x = 7,\ y = 16$.

Случай 3. $x = 11n$

$$3t - 2 = 11n \to 3t - 11n = 2 \to \begin{cases} t = -3 + 11s \\ n = -1 + 3s, \end{cases} \to \begin{cases} x = 11(3s-1) \\ y = 55s - 14,\ 1 \le s \le 22 \end{cases}$$

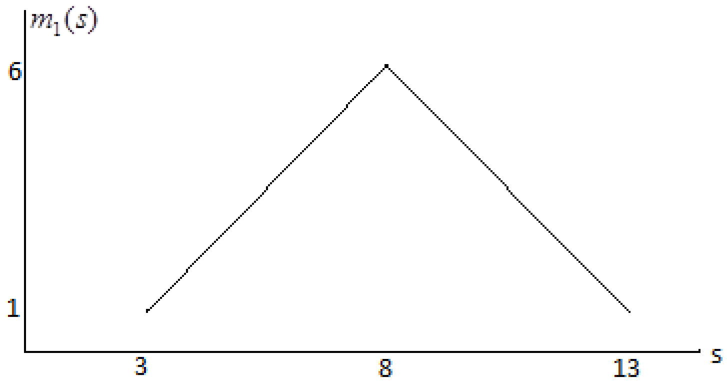
Число $y \ge 41$ является делителем числа 1232 и не делится на 11. Такими делителями могут быть только 56 и 112, но им не соответствует целое s . Таким образом, в случае 3 решений уравнения нет.

4. Ответ: $s = 10$ и $s = 11$

Решение

Пусть x, y, z - числа, выпавшие на первой, второй и третьей кости. Случайная величина $s = x + y + z$ принимает значения от 3 до 18. Общее число исходов опыта $n = 6^3$. Через $m(s)$ обозначим число опытов (число различных троек $(x; y; z)$), благоприятствующих событию $s = x + y + z$. Разложим это событие в сумму шести несовместных событий по числу $z = 1, 2, ..., 6$, выпавших на третьем кубике. Через $m_z(s)$ обозначим число различных троек при фиксированном z. Каждая $m_z(s)$, имеет свою область определения по s. Например, для $z=1 \to x+y=s-1 \to 2 \le s-1 \le 12 \to s \in [3;13]$. Положим, что $m_1(s)=0$ для $s \in [14;18]$. Или при $z=4 \to x+y=s-4 \to 2 \le s-4 \le 12 \to s \in [6;16]$. Тогда $m_4(s)$ доопределяется нулем для $s=3,4,5,17,18$. Очевидно, что $m(s)=\sum_{z=1}^{6} m_z(s)$.

На рис отмечена зависимость $m_1(s)$ - числа различных пар (x,y) решений уравнения $x+y=s-1$



Например, для $s=8$ уравнение имеет 6 различных решений. В аналитической форме, $m_1(s)=6-|s-8|, s \in [3;13]$. Остальные $m_z(s)$ находятся из $m_1(s)$ путем сдвига по оси s на единицу:

$m_2(s)=6-|s-9|, s \in [4;14]$

$m_3(s)=6-|s-10|, s \in [5;15]$

$m_4(s)=6-|s-11|, s \in [6;16]$

$m_5(s)=6-|s-12|, s \in [7;17]$

$m_6(s)=6-|s-13|, s \in [8;18]$

Значения $m(s)$ при различных $s \in [3;18]$ получены суммированием $m_z(s)$ с учетом их областей определения. Например, при $s=3$ ненулевым слагаемым является только $m_1(s)\big|_{s=3}=1$, а при $s=10$, слагаемыми $m(s)$ являются все $m_z(s), z=1,2,....6$ и $m(10)=4+5+6+5+4+3=27$

В таблице приведены все остальные значения $m(s)$ для $s=3,4,...,18$

s	3	4	5	6	7	8	9	10
m (s)	1	3	6	10	15	21	25	27

s	11	12	13	14	15	16	17	18

m (s)	27	25	21	15	10	6	3	1

Из приведенной таблицы видно, что наибольшую вероятность $p=\frac{27}{6^3}=\frac{1}{8}$ имеют значения $s=10$ и $s=11$.

5. Ответ:1) $S=\frac{86}{3}$;

$$2)\begin{cases} b\in(-\infty;k-5]\cup[1-2k;+\infty),\ \forall k\in\left[-2;-\frac{1}{3}\right] \\ b\in(-\infty;k-5]\cup[k+2;+\infty),\ \forall k\in\left(-\frac{1}{3};2\right] \\ b\in(-\infty;1-2k]\cup[k+2;+\infty),\ \forall k\in(2;5] \end{cases}$$

Решение

Обозначение: $f(x,y)=y-kx-b$ Прямая имеет общие точки с треугольником, если она имеет общую точку хотя бы с одной его стороной.

Случай 1. Прямая пересекает сторону AC

$f(x_A,y_A)\cdot f(x_C,y_C)\le 0\rightarrow(2+k-b)(-5+k-b)\le 0$ (*)

На рис 1 изображена полоса между прямыми $b=k+2$ и $b=k-5$, координаты точек которой удовлетворяют неравенству (*)

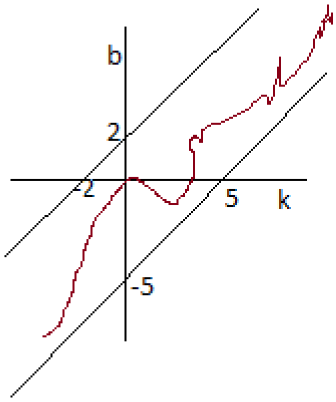


Рис 1

Случай 2. Прямая пересекает сторону AB

$f(x_A,y_A)\cdot f(x_B,y_B)\le 0\rightarrow(2+k-b)(1-2k-b)\le 0$ (**)

На рис 2 изображена область с границей $b=k+2$ и $b=1-2k$, координаты всех точек которой удовлетворяют неравенству (**).

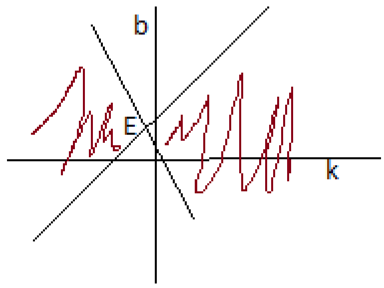


Рис 2

Точка E пересечения прямых $b=k+2$ и $b=1-2k$ имеет координаты $E\left(-1/3;5/3\right)$.

Случай 3. Прямая пересекает сторону BC

$f(x_C,y_C)\cdot f(x_B,y_B)\le 0\to(-5+k-b)(1-2k-b)\le 0$ (***)

На рис 3 изображена область с границей $b=k-5$ и $b=1-2k$, координаты всех точек которой удовлетворяют неравенству (***).

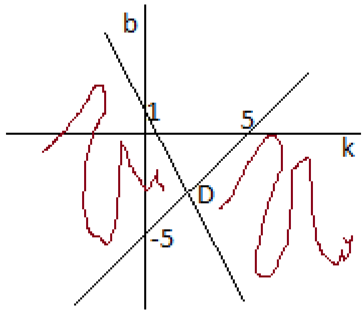


Рис 3

Точка D пересечения прямых $b=k-5$ и $b=1-2k$ имеет координаты $D(2;-3)$

Объединяя три рисунка, получим искомую картинку:

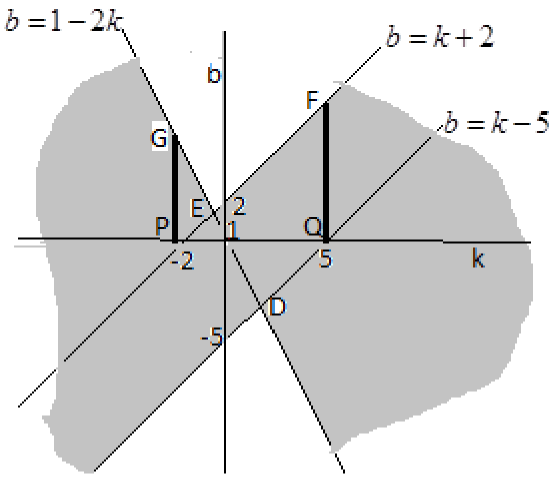


Рис 4

Пересечение области D с полуполосой является объединением треугольников PGE и PFQ.

Площадь $S_{PGE}=\frac{1}{2}\cdot\frac{5}{3}\cdot 5=\frac{25}{6}$, площадь $S_{PFQ}=\frac{49}{2}$, складывая их получим ответ.

Ответ для второй части задачи читается с рис 4 для частей прямых $k=C$, не вошедших в D

6. Ответ: $p = 2R\left(1 + 4\sin\frac{\pi}{8}\right) = 2R\left(1 + 2\sqrt{2-\sqrt{2}}\right)$

Решение

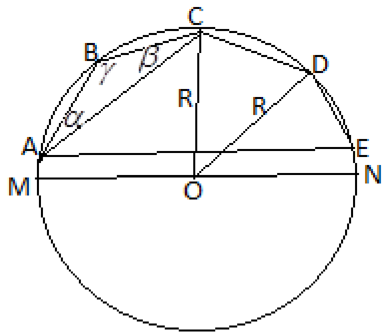


Рис 1

Пусть $ABCDE$ - искомый пятиугольник, $MN -$ диаметр, параллельный AE. Докажем, что $AB = BC = CD = DE$. В треугольнике ABC сумма квадратов длин сторон AB и BC должна быть максимально возможной, при условии, что вершины A, C, D и E фиксированы.

Угол γ при вершине B тупой,

$AB = 2R\sin\beta,\ BC = 2R\sin\alpha \to f = AB^2 + BC^2 = 4R^2\left(\sin^2\alpha + \sin^2\beta\right) \to \max$

при условии $\alpha + \beta = \pi - \gamma$.

$f'_\alpha = 4R^2\left(\sin 2\alpha - \sin 2\beta\right) = 0 \to \alpha = \beta \to \alpha = \frac{\pi}{2} - \frac{\gamma}{2}$ и это точка локального максимума. Треугольник ABC равнобедренный и $AB = BC$. Аналогично, $BC = CD$ и $CD = DE$.

Для многоугольника с наибольшим периметром сторона $AE = MN$. Тогда $\angle COD = \frac{\pi}{4}$,

$CD = 2R\sin\frac{\pi}{8}$ и периметр многоугольника $p = 8R\sin\frac{\pi}{8} + 2R = 2R\left(1 + 4\sin\frac{\pi}{8}\right) = 2R\left(1 + 2\sqrt{2-\sqrt{2}}\right)$