Ответы и решения

1. Решение. Пусть $p_1(x)=x^2+ax+b.$ Поскольку корни многочлена $p_1(x)$ содержатся среди корней многочлена $p_2(x)$, последний делится на $p_1(x)$ без остатка, то есть $p_2(x)=(x+c)(x^2+ax+b).$ Тогда

$$p_1(x)+p_2(x)=(x+c+1)(x^2+ax+b).$$

С другой стороны, по условию $p(x)=p_1(x)+p_2(x)=(x+1)(x-2)(x+3)$.

Возможны три случая.

Случай 1

$$\begin{cases} x+c+1=x+1 \\ x^2+ax+b=(x-2)(x+3) \end{cases} \to \begin{cases} c=0 \\ a=1 \\ b=-6 \end{cases} \to \begin{cases} p_1(x)=x^2+x-6 \\ p_2(x)=x\left(x^2+x-6\right) \end{cases} \to p_1\cdot p_2=x\left(x^2+x-6\right)^2.$$

Случай 2

$$\begin{cases} x+c+1=x-2 \\ x^2+ax+b=(x+1)(x+3) \end{cases} \to \begin{cases} c=-3 \\ a=4 \\ b=3 \end{cases} \to \begin{cases} p_1(x)=x^2+4x+3 \\ p_2(x)=(x-3)\left(x^2+4x+3\right) \end{cases} \to p_1\cdot p_2=(x-3)\left(x^2+4x+3\right)^2.$$

Случай 3

$$\begin{cases} x+c+1=x+3 \\ x^2+ax+b=(x+1)(x-2) \end{cases} \to \begin{cases} c=2 \\ a=-1 \\ b=-2 \end{cases} \to \begin{cases} p_1(x)=x^2-x-2 \\ p_2(x)=(x+2)\left(x^2-x-2\right) \end{cases} \to p_1\cdot p_2=(x+2)\left(x^2-x-2\right)^2.$$

2. Решение. Пусть x,y,z число сотен, десятков и единиц числа a. По условию $x+y+z=16.$ Наименьшее число, удовлетворяющее этим условиям это $a_{\min}=169,$ а наибольшее число – $a_{\max}=970.$ Наибольшее расстояние равно их разности $d_{\max}=a_{\max}-a_{\min}=801.$ Наименьшее расстояние между числами из этого множества равно наименьшему расстоянию между соседними числами. Пусть некоторое число из этого множества имеет вид $a=N+10x+y$ $(N\ge 100),$ тогда следующее число из этого множества $b=N+10(x+1)+(y-1).$ Разность между ними $b-a=9$, например, можно выбрать $a=169,$ а $b=178.$ Таким образом, $d_{\max}=801,$ а $d_{\min}=9.$

3. Решение. При суммировании всех различных чисел, полученных из числа $a=987654321$, включая само число $a,$ в каждом разряде получим сумму всех его цифр $9+8+7+\ldots+3+2+1=45.$ Следовательно, $b=45\left(10^8+10^7+10^6+\ldots+10^2+10+1\right)=45\cdot 111111111=4999999995.$ Вычислим

$\dfrac{\pi b}{36}=\dfrac{\pi\cdot 45\cdot 111111111}{36}=\dfrac{\pi\cdot 555555555}{4}=138888888\pi+\dfrac{3}{4}\pi.$ Отсюда следует, что

$$\sin\frac{\pi b}{36}=\sin\left(138888888\pi+\frac{3}{4}\pi\right)=\sin\frac{3\pi}{4}=\frac{\sqrt{2}}{2}.$$

4. Решение. Заметим, что, так как r_n – остаток от деления n на 3, то он может принимать три различных значения 0, 1 и 2.

Случай 1. $n=3k, k\in\mathbb{N}$, тогда $r_n=0,\ ,r_{n+1}=1, r_{n+2}=2.$ Уравнение имеет вид:

$$n^2x^2-n(n+2)x+n+1=0.$$

Его корни равны

$$x_{1,n}=\frac{1}{n},\quad x_{2,n}=\frac{n+1}{n}.$$

Условию задачи ($x_n\to 1$ при $n\to\infty$) удовлетворяет только $x_{2,n}$.

Случай 2. $n=3k+1, k\in\mathbb{N}\cup\{0\}$, тогда $r_n=1,\ ,r_{n+1}=2, r_{n+2}=0$. Уравнение имеет вид:

$$-n(n+2)x^2+(n+1)x+n^2=0.$$

Его корни равны

$$x_{1,n}=\frac{n+1-\sqrt{4n^4+8n^3+n^2+2n+1}}{2n(n+2)},\quad x_{2,n}=\frac{n+1+\sqrt{4n^4+8n^3+n^2+2n+1}}{2n(n+2)}.$$

Условию задачи ($x_n\to 1$ при $n\to\infty$) удовлетворяет только $x_{2,n}$.

Случай 3. $n=3k+2, k\in\mathbb{N}\cup\{0\}$, тогда $r_n=2,\ ,r_{n+1}=0, r_{n+2}=1.$ Уравнение имеет вид:

$$(n+1)x^2+n^2x-n(n+2)=0.$$

Его корни равны

$$x_{1,n}=\frac{-n^2-\sqrt{n^4+4n^3+12n^2+8n}}{2(n+1)},$$

$$x_{2,n}=\frac{-n^2+\sqrt{n^4+4n^3+12n^2+8n}}{2(n+1)}=\frac{4n^3+12n^2+8n}{2(n+1)\left(\sqrt{n^4+4n^3+12n^2+8n}+n^2\right)}.$$

Условию задачи ($x_n\to 1$ при $n\to\infty$) удовлетворяет только $x_{2,n}$.

Таким образом, искомая последовательность

$$x_n=x_{2,n}=\begin{cases}\dfrac{n+1}{n}, & n=3k, k\in\mathbb{N},\\[2mm] \dfrac{n+1+\sqrt{4n^4+8n^3+n^2+2n+1}}{2n(n+2)}, & n=3k+1, k\in\mathbb{N}\cup\{0\},\\[2mm] \dfrac{-n^2+\sqrt{n^4+4n^3+12n^2+8n}}{2(n+1)}, & n=3k+2,\ k\in\mathbb{N}\cup\{0\}.\end{cases}$$

5. Решение. Пусть $Q-$ центр искомой окружности, а $q-$ ее радиус.

Случай 1. Центр O не лежит внутри искомой окружности (рис.1).

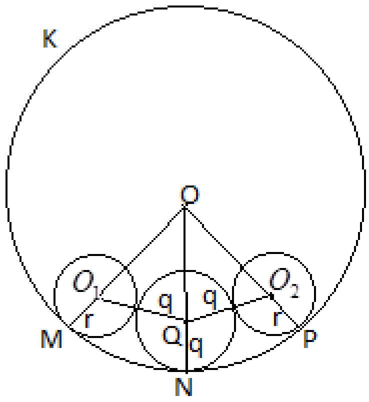

Рис 1

Из равенства треугольников O_1OQ и QOO_2 и условия задачи следует, что $\angle O_1OQ = \angle O_2OQ = 60^0$.

Рассмотрим треугольник OO_1Q. Запишем теорему косинусов:

$$(r+q)^2 = (R-r)^2 + (R-q)^2 - 2(R-r)(R-q)\cos 60^0.$$

Отсюда находим: $q = \dfrac{R(R-r)}{R+3r}$.

Случай 2. Центр O лежит внутри искомой окружности (рис. 2).

Из равенства треугольников O_1OQ и QOO_2 и условия задачи следует, что $\angle O_1OQ = \angle O_2OQ = 120^0$.

Рассмотрим треугольник OO_1Q. Запишем теорему косинусов:

$$(r+q)^2 = (R-r)^2 + (R-q)^2 - 2(R-r)(R-q)\cos 120^0.$$

Отсюда находим: $q = \dfrac{3R(R-r)}{3R+r}$.

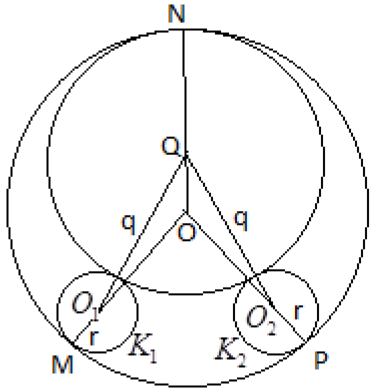

Рис 2