2.10. Выездной отборочный тур олимпиады «Росатом», 11 класс, комплект 1

1. (2 балла) Многочлен $Q_n(x)$ равен произведению одночленов $P_k(x)=2(x-k)+3$ для $k=1,2,\ldots,n$. Написать формулу для вычисления коэффициента c_{n-1} при x^{n-1}
и свободного члена c_0 многочлена $Q_n(x)$ в зависимости от n.

2. (2 балла) При каких a уравнение $3\sin^2 x+4\sqrt{2}\sin x\cos x+5\cos^2 x=a$ имеет решения?

3. (2 балла) Сумма n членов арифметической прогрессии a_n равна известной функции $S(n)$. Найти сумму n членов последовательности $b_n=\dfrac{a_{3n}+a_{7n}+a_{8n}}{3}$,
если $b_1=4$.

4. (2 балла) Петя собрал из пяти букв слово «ЛАПКА», а потом случайным образом, не подглядывая, изменил порядок букв в слове. Найти вероятность того, что получилось слово «ПАЛКА».

5. (2 балла) Найти максимальное возможное число целых решений $(x;y)$ системы неравенств $\begin{cases} 3\le x\le 12 \\ |x+3y+3a+6|\le 6 \end{cases}$. При каких значениях a оно достигается?

6. (2 балла) Точки M и N расположены на ребрах DD' и CC' куба $ABCDA'B'C'D'$ так, что $DM:MD'=1:2$ и $C'N:NC=1:3$. Точка P лежит на пересечении прямых $C'D$ и MN. Какую часть объема куба занимает пирамида $PBDA'$?

2.11. Выездной отборочный тур олимпиады «Росатом», 11 класс, комплект 2

1. (2 балла) Какие значения принимает выражение $x^2+y^2+4x-8y$, для всех пар $(x;y)$ удовлетворяющих неравенству $x^2+y^2-12x-6y+41\le 0$?

2. (2 балла) Найти $(x;y)$, для которых $x=\arccos 2y$ и $y=\sin x$.

3. (2 балла) Имеются весы с двумя чашками, на которых можно располагать груз и гири. Возможно ли с помощью таких весов определить вес груза, содержащего произвольное целое число кг, используя только гири в 13 и 7 кг? Найти наименьшее число гирь в 13 и 7 кг, с помощью которых можно взвесить груз в 200 кг, если гири и груз могут располагаться на обеих чашках весов.

4. (2 балла) Петя назвал цифру 7, Вова и Саша, не сговариваясь, случайным образом также назвали по цифре от 1 до 9. Из этих цифр случайно было составлено трехзначное число, большее 300. Найти вероятность того, что это число делится на 3.

5. (2 балла) При каких значениях a уравнение $y-ax+7a-4=0$ имеет три целых решения $(x;y)$, для которых $x\in[4;10]$?

6. (2 балла) На плоскости нарисован круг с центром в точке O радиуса 1. Точка M расположена на границе круга, а точка N – вне круга, на расстоянии 2 от его центра так, что угол MON равен $2\pi/3$. Найти наименьшую длину пути, соединяющего точки N и M, не пересекающего границы круга.

2.12. Выездной отборочный тур олимпиады «Росатом», 11 класс, комплект 3

1. (2 балла) При каких значениях параметров a и b остаток от деления многочлена $P(x)=x^3+3(a+b)x^2+(b-a)x+2$ на многочлен $Q(x)=x^2-1$ равен $R(x)=2x+3$. Найдите многочлен неполного частного.

2. (2 балла) Целой частью числа x, обозначение $\left[x\right]$, называют наибольшее целое число, не превосходящее x. Решить уравнение $\left(1+(-1)^{[x]}\right)\sin(\pi x)+2\cos(\pi x)=\sqrt{2}$.

3. (2 балла) Уравнение $x^3-86x^2+1180x-4200=0$ имеет только целые корни.
Не решая уравнения, найти наибольший общий делитель и наименьшее общее кратное его корней.

4. (2 балла) Найти решения $(x;y;z)$ системы $\begin{cases} \sin x+\sin y+\sin z=1/2 \\ \sin x\sin y+\sin x\sin z+\sin y\sin z=-1 \\ \sin x\sin y\sin z=-1/2 \end{cases}$

с наибольшим значением $\sin x$.

5. (2 балла) Найти значения a, при которых уравнение $a(x-5)= \quad x-1$ имеет единственное решение, а уравнение $a\sqrt{|x-1|}=(x-5)$ - два решения.

6. (2 балла) В кубе $ABCDA'B'C'D'$ с ребром $2 \quad 3$ проведено сечение плоскостью, параллельной плоскости BDA' и отстоящей от нее на расстояние равное 1. Найти площадь сечения.

2.13. Выездной отборочный тур олимпиады «Росатом», 11 класс, комплект 4

1. (2 балла) Какое наибольшее и наименьшее количество гирь по 3 кг и 5 кг может быть использовано при взвешивании груза в 71 кг, если гири устанавливаются на одну чашу весов, а груз - на другую?

2. (2 балла) Найти решение x уравнения $\sin\left(|x+3\pi|+|x-\pi|\right)\cdot\cos\left(|x-2\pi|+|x-4\pi|\right)=0,5$, для которого $\sin x$ принимает наибольшее возможное значение.

3. (2 балла) Для членов убывающей геометрической прогрессии $\{b_n\}$ выполняется равенство $2b_{n+1}-3b_n+b_{n-1}=0$ для любого целого $n\geq 2$. Найти отношение $b_{14}:b_6$.

4. (2 балла) Обозначим через $P(a)$ наибольший нечетный делитель целого, положительного числа a. Найти сумму делителей чисел $P(a)$ для всех a из отрезка $\left[2^{100};2^{101}\right]$.

5. (2 балла) Найти значения a, при которых система $\begin{cases} x\cos a+y\sin a-2=0 \\ x^2+y^2+6x-8y+24=0 \end{cases}$ имеет единственное решение.

6. (2 балла) Тело G в пространстве ограничено поверхностью сферы радиуса 2 с центром в точке O и двумя взаимно перпендикулярными плоскостями P и Q, проходящими через точку O. Плоскость T, параллельная прямой пересечения P и Q, отстоит от точки O на расстояние 1 и составляет с плоскостью P угол 45^0. Найти площадь сечения тела G плоскостью T.