2.14. Олимпиада имени И.В.Курчатова (отборочный тур олимпиады «Росатом»), 11 класс

1. (2 балла) Рассматриваются три последовательности: a_n - арифметическая прогрессия с разностью d, $b_n = a_{2n+1}$ и $c_n = a_{3n+k}$ для некоторого k. Доказать, что b_n и c_n также арифметические прогрессии. Найти k, при котором три числа a_n, b_n и c_n являются при любом n последовательными членами некоторой арифметической прогрессии. Найти разность этой прогрессии.

2. (2 балла) Решить уравнение $\cos x \cdot f^{-1}(\sin x) \cdot f\left(\sin^{-1} x\right) = 2/3$, где $f(x) = x^2/(x^2+1)$.

3. (2 балла) $\{b_n\}$ – геометрическая прогрессия с $b_1 = 3$ и знаменателем $q = 1/2$. Функция $f(x) = a\log_2 x + b$ такова, что $f(b_n) = n$ для всех натуральных n. Найти a и b.

4. (2 балла) Петя произвольно написал первую цифру числа, Ваня – вторую, а Маша – третью. Известно, что первая цифра числа оказалась не нулем, а сумма его цифр делится на 4. Найти вероятность этого события.

5. (2 балла) При каких значениях a функция $f(x) = x^3 + ax^2 + 27x - 3$ имеет локальный минимум на интервале $(1;4)$?

6. (2 балла) Точка M расположена на ребре DD' куба $ABCDA'B'C'D'$ на расстоянии 1 от вершины D'. Точки P и Q - центры граней $AA'B'B$ и $AA'D'D$. Найти площадь сечения куба плоскостью, проходящей через точку M, параллельной ребру $D'C'$ и равноудаленной от точек P и Q, если длина ребра куба равна 3.