2. Задания олимпиады «Росатом» 2015-2016 учебного года

2.1. Заключительный тур олимпиады «Росатом», 11 класс, комплект 1

Задание

1. (2 балла) Сколько пар $(x;\, y)$ целых чисел, являющихся решениями уравнения $7x-5y=23$, удовлетворяют неравенству $x^2+y^2\le 37$? Найти пару $(x;\, y)$, для которой $x+y$ наибольшее.

2. (2 балла) Найти x, при котором выражение $\left(\sin^2 x-\cos x-1/4\right)^2+\left(\cos 2x+\cos x\right)^2$ принимает наименьшее значение.

3. (2 балла) Для квадратного трехчлена $P_1(x)=x^2-x-6$ и натурального числа n определим многочлены $P_2(x)=P_1(2x),\ P_3(x)=P_2(2x), \ldots,\ P_n(x)=P_{n-1}(2x)$. Решить уравнение $P_n(x)=0$ и найти сумму корней многочлена $Q_n(x)=P_1(x)+P_2(x)+\ldots+P_n(x)$.

4. (2 балла) Петя и Вова играют в кости на деньги. Ведущий игру Петя выигрывает, если при бросании им двух игральных кубиков сумма выпавших на них очков не превосходит 4 и проигрывает во всех остальных случаях. Проиграв, Петя отдаёт Вове 1 рубль, выиграв – получает от Вовы k рублей. Игра считается справедливой, если среднее значение выигрыша каждым игроком равна нулю. Найти значение k, при котором игра будет справедливой?

5. (2 балла) Функция $\chi(t)=\begin{cases}1, \text{ при } t>0,\\ 0, \text{ при } t\le 0\end{cases}$. При каких значениях a система $\begin{cases}x\cdot\chi(x-a)+y\cdot\chi(y-2a)=5a\\ x+2y=2\end{cases}$ имеет единственное решение?

6. (2 балла) В прямоугольнике $ABCD$ со сторонами $AD=8$, $AB=4$ расположены три круга K, K_1 и K_2. Круг K касается кругов K_1, K_2 внешним образом, а также прямых AD и BC. Круги K_1, K_2 касаются также сторон AD, AB и AD, CD соответственно. Найти максимальное возможное значение суммы площадей трех кругов.

2.2. Заключительный тур олимпиады «Росатом», 11 класс, комплект 2

1. (2 балла) Для каких номеров n члены последовательности $a_n = (n+1)/2$ удовлетворяют неравенству $4^{\log_{a_n} 5} - 2^{\log_{a_n} 5} - 2 \geq 0$

2. (2 балла) Найти x и y, для которых числа $\sin x, \sin y, \cos x$ могут быть одновременно последовательными членами арифметической и геометрической прогрессий.

3. (2 балла) Петя придумал способ построения множества чисел. На первом этапе он разместил между числами 5 и 17 их среднее арифметическое и записал полученные три числа в строчку. На втором этапе, он разместил между любыми двумя соседними числами их средние арифметические и опять записал результат в строку. Пете это занятие понравилось, и он проделал то же самое 15 раз. Сколько чисел написал Петя в строке на последнем этапе и какова их сумма? Какое число будет находится на тринадцатой позиции в строке чисел, записанных Петей на последнем этапе?

4. (2 балла) Вершины куба случайным образом покрашены в два цвета, причем четыре вершины в желтый цвет, а остальные четыре – в зеленый. Петя, не обращая внимания на раскраску вершин, бросает кубик на стол. Найти вероятность того, что все вершины, оказавшиеся на плоскости стола, будут желтыми.

5. (2 балла) При каких a система $\begin{cases} (x-3\cos a)^2 + (y-3\sin a)^2 = 1 \\ (x-4\cos 2a)^2 + (y-4\sin 2a)^2 = 4 \end{cases}$ имеет единственное решение?

6. (2 балла) На каждой из четырех боковых граней куба с ребром 4 взяли по точке M, N, P и Q так, что они могут быть центрами окружностей радиуса 1, принадлежащих боковым граням. Какое наибольшее значение может принимать объем пирамиды $MNPQ$?

2.3. Заключительный тур олимпиады «Росатом», 11 класс, комплект 3

1. (2 балла) При каких значениях a график функции $y = x^3 + 6x^2 + ax + 11$ касается прямой с уравнением $x + y = 3$? Найти абсциссы точек касания.

2. (2 балла) При каких целых n число $x = \pi / 4$ является решением уравнения $\cos\frac{nx}{3} = \sin\left(x + \frac{\pi n}{3}\right)$?

3. (2 балла) На отрезке $\left[1; e^2\right]$ найти x, для которого $2\int\limits_1^x \frac{2\ln t + 1}{t} dt = \int\limits_x^{e^2} \frac{2\ln t + 1}{t} dt$.

4. (2 балла) Для игры в «пуговки» используется коробка с круглым дном радиуса 9 с бортиком и две «пуговицы» в виде цилиндров с радиусом основания 1 и небольшой высотой. Первый игрок, в тайне от второго игрока, ставит «пуговицу» в коробку. Судья встречи запоминает ее положение и убирает «пуговицу». Второй игрок случайным образом бросает вторую пуговицу в коробку. Первый игрок выигрывает, если по заявлению судьи «пуговицы» не могли иметь соприкосновение. Как должен располагать пуговицу первый игрок, чтобы вероятность его выигрыша была максимальной? Найти эту вероятность.

5. (2 балла) Найти a, при которых пара целых чисел $(x; y)$, удовлетворяющая неравенствам $x - y > a - 3,\ 2x + y < 2a + 3,\ y > 1,\ x^2 + y^2 < 9$, единственная.

6. (2 балла) Колесо радиуса 1 катится внутри обода радиуса 3, совершая полный оборот окружности обода. На его пути возникает препятствие в виде круга радиуса 1, касающегося внутренним образом обода. Колесо перекатывается через препятствие, сохраняя касание с его границей. На сколько бы изменился путь,
пройденный центром колеса за один оборот окружности обода, если бы препятствия не было?

2.4. Заключительный тур олимпиады «Росатом», 11 класс, комплект 4

1. (2 балла) Для любой монотонной на всей вещественной оси функции $f(x)$, для которой $f(\log_2 6)=0$, решить уравнение $f\left(\log_2(x(x^2-1))-0,5\log_2(x-1)^2\right)=0$.

2. (2 балла) Траектория движения мыши по плоскости в некоторой декартовой системе координат описывается уравнением $x=a\cdot\cos t,\ \ y=\sin t, t\in[0;2\pi]$. При каких значениях a мышь пересекает прямолинейную канавку, имеющую в той же системе координат уравнение $2x+3y=5$?

3. (2 балла) A и B – множества значений последовательностей $a_n=2\cdot 9^{3(n-1)}$ и $b_m=18\cdot 3^{7(m-1)}$, $n,m=1,2,\ldots$ соответственно. Доказать, что их пересечение $A\cap B$ может быть множеством значений для некоторой геометрической прогрессии c_k, $k=1,2,\ldots$. Найти c_5 и знаменатель прогрессии.

4. (2 балла) Васе предложили участвовать в соревнованиях по стрельбе из рогатки, пневматического пистолета и ружья. Вероятность поражения мишени из рогатки равна $0,2$, из пистолета - $0,7$, из ружья $0,8$. Вася стрелял из каждого оружия по два раза. Найти вероятность того, что он допустил только один промах.

5. (2 балла) При каком значении a неравенство $\sin x\cdot\cos x\cdot\left(1-2\sin x\right)\geq 0$ выполняется при любых x на отрезке $\left[\frac{4\pi}{3}-2a;\frac{3\pi}{2}-a\right]$?

6. (2 балла) Колесо в форме правильного шестиугольника перекатывается по прямолинейному участку дороги. Найти отношение длины пути, пройденного центром колеса за один его оборот, к периметру колеса.