2.7. Заключительный тур олимпиады «Росатом», 8 класс

Ответы и решения

1. Ответ: При $a = \pm 2$ решения $x_1 = \pm 1, x_2 = \pm 4$, при $a = \pm 8$ решения $x_1 = \pm 1, x_2 = \pm 4$
(знаки x совпадают со знаком a)
Решение.
При $a = 0$ уравнение имеет одно целое решение $x = 0$.
При $a \neq 0$ уравнение имеет решения $x_1 = \dfrac{8}{a}$ и $x_2 = \dfrac{a}{2}$, которые совпадают при $a^2 = 16 \to a = \pm 4$.
Решение x_1 целое, если $a = \pm 1, \pm 2, \pm 4, \pm 8$. Решение x_2 целое, если $a -$ четное число.
Для выполнения условия остаются $a = \pm 2$ и $a = \pm 8$. Им соответствуют решения:
Для $a = \pm 2$ $x_1 = \pm 4,\ x_2 = \pm 1$, для $a = \pm 8$ $x_1 = \pm 1,\ x_2 = \pm 4$
2. Ответ: 11 жуков.
Решение.
n жуков имеют по 6 лапок, m жуков имеют по 8 лапок. Общее число лапок $6n + 8m = 86 \to 3n + 4m = 43$. Общее решение этого уравнения: $\begin{cases} n = 4t - 43 \geq 1 \\ m = 43 - 3t \geq 1 \end{cases} \to t = 11, 12, 13, 14$.
Общее число жуков $n + m = t$, т.е. наименьшее число жуков 11.

3. Ответ: $\dfrac{22}{3}$ при $p = -1$.
Решение.
Отбросим условие цело численности p и рассмотрим отклонение $\left| \dfrac{19p - 3}{p - 2} - 5 \right|$ в зависимости от p :
Преобразование: $f(p) = \dfrac{19p - 3}{p - 2} - 5 = 7 \cdot \dfrac{2p + 1}{p - 2}$ дробно-линейная функция. Ее график изображен на рис.1.

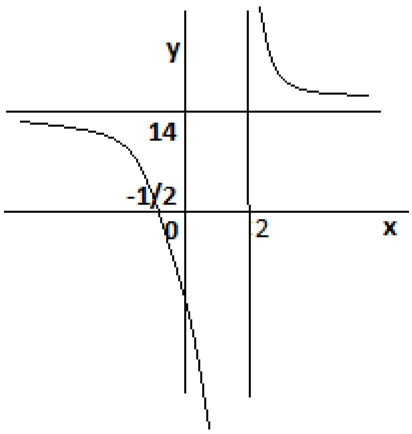


Рис. 1

График отклонения $\left|f(p)\right|$ изображен на рис 2.

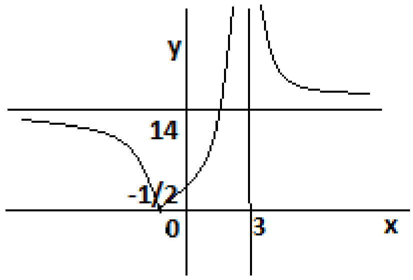


Рис. 2

Минимум отклонения равен нулю при $p=-1/2$. Для целых p минимальное значение отклонения достигается либо при $p=-1$ либо при $p=0$.

$\left|f(-1)\right|=\dfrac{7}{3}$ и $\left|f(0)\right|=\dfrac{7}{2}$. Таким образом, $p=-1$ обеспечивает наименьшее отклонение, а искомое число $\dfrac{22}{3}$.

4. Ответ: $a_{\min}=15876$

Решение.

Число $a=m^2$ может делиться на 21только в том случае, если m делится на 3 и на 7, т.е. $m=21k\to a=441k^2$. Из того, что оно пятизначное следует неравенство $10000\le 441k^2\le 99999\to 23\le k^2\le 226$. Минимальное четное $k=6$ и $a_{\min}=441\cdot 36=15876$

Задача 5 Ответ: 1) 16 2) возможно, бесконечным числом способов.

Решение. На рис. изображен треугольник MNP.

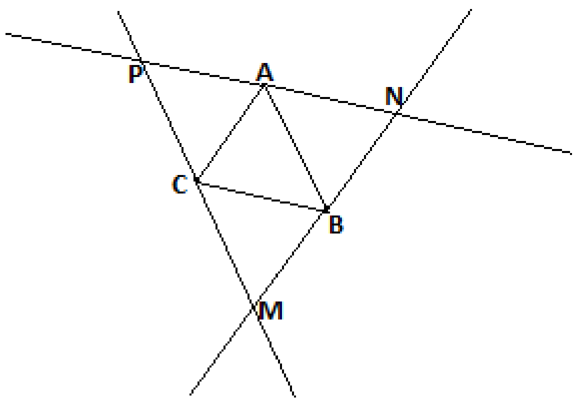


Рис.1

Построение: Через точку A проведем прямую L_A, параллельную BC, через точку B - прямую L_B, параллельную AC, и через точку C - прямую L_C, параллельную AB. Построенные прямые попарно пересекаются в точках M, N и P . Четырехугольники $ACMB$ и $ACBN-$ параллелограммы (по построению), $MB = CA = BN$, т.е. $B-$ середина стороны MN . Аналогично, для других сторон. Треугольник MNP подобен треугольнику ABC с коэффициентом подобия $k = 2$, поэтому его площадь в 4 раза больше площади треугольника ABC, т.е. $S_{MNP} = 16$.

Для ответа на второй вопрос задачи укажем ГМТ на плоскости, из которых заданный отрезок AB виден под заданным углом γ . Таким ГМТ является дуга окружности, у которой отрезок AB является хордой, стягивающей дугу с центральным углом 2γ. Построение такой дуги изображено на рис.2

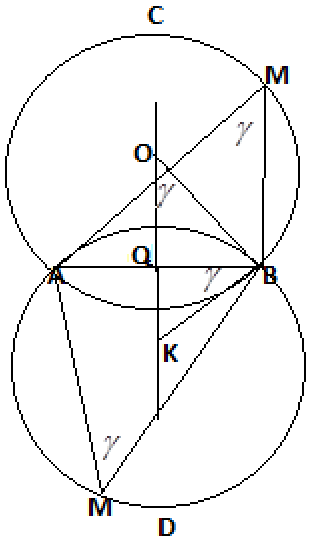


Рис.2

Построение:

1) Строим отрезок BK под углом γ к отрезку AB , точка K лежит на срединном перпендикуляре к отрезку AB;

2) Через точку B проводим перпендикуляр BO к отрезку BK , точка O лежит на срединном перпендикуляре к отрезку AB;

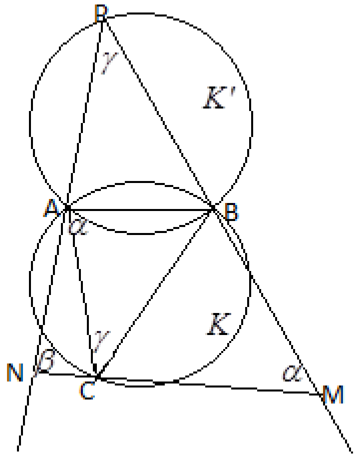
3) строим окружность с центром в точке O и радиусом, равным длине отрезка BO;

4) Из любой точки M дуги ACB (и ей симметричной дуги ADM) отрезок AB виден под углом γ

Доказательство.

$BK-$ касательная к окружности, поэтому дуга между касательной и хордой AB измеряется центральным углом 2γ , а вписанный в окружность угол AMB равен половине этой дуги, т.е. γ.

Построение треугольника MNP , подобного ABC :



1) Окружность K описана около $\triangle ABC$. Окружность K' симметрична окружности K относительно прямой AB. На дуге окружности K' с хордой AB, из точек которой отрезок AB виден под

углом $\gamma = \measuredangle ACB$,выбираем любую точку P , так чтобы стороны угла APB были не параллельны AC и BC , а точка C располагалась внутри угла APB.

2) Через точку C проводим прямую так, чтобы она образовывала угол $\beta = \measuredangle ABC$ с одной из сторон угла APB. Точки пересечения этой прямой со сторонами угла APB обозначим через M и N .

3) треугольник MNP подобен $\triangle ABC$ по двум углам. Точки A, B и C лежат на сторонах треугольника MNP и не являются его серединами.

2.21. Критерии определения победителей и призеров Отраслевой физико-математической олимпиады «Росатом» 2015-2016 учебного года, Математика

Оргкомитет Отраслевой физико-математической олимпиады школьников «Росатом» установил следующие принципы оценивания работ заключительного тура и определения победителей и призеров олимпиады 2015-2016 учебного года.

1. Максимальная оценка за каждую задачу – 2 балла независимо от уровня сложности задачи.
2. Каждая задача в зависимости от полноты решения оценивалась оценкой: 0 баллов, 0,5 балла, 1 балл, 1,5 балла или 2 балла.
3. Оценка олимпиадной работы равна сумме оценок за все задачи.
4. Если сумма оценок за задачи оказывается «полуцелой» (5.5, 6.5 и т.д.), оценка округляется до целого значения с избытком или недостатком по усмотрению проверяющего работу члена жюри.
5. Победителями и призерами олимпиады считаются участники заключительного тура, получившие следующие оценки

Класс	Оценки победителей и призеров		
	Победитель	Призер 2 степени	Призер 3 степени
7	10-9	8	7
8	10	9	нет
9	10	9	8
10	10	9	нет
11	10-12	9	8