2.10. Выездной отборочный тур олимпиады «Росатом», 11 класс, комплект 1

Ответы и решения

1. Ответ: 1) $c_{n-1}=-2^{n-1}\cdot n(n-2)$ 2) $c_0=(-1)^{n+1}\left(2n-3\right)!!$

Решение.

Многочлены $P_n(x)$ первого порядка имеют корни $x_n=n-\frac{3}{2}=\frac{2n-3}{2}$. Все они являются корнями многочлена $Q_n(x)$. Коэффициент

$$c_{n-1}=-2^n\left(x_1+x_2+...+x_n\right)=-2^{n-1}\left(2(1+2+3+...+n)-3n\right)=-2^{n-1}\left((n+1)n-3n\right)=$$
$$=-2^{n-1}\left(n^2-2n\right)=-2^{n-1}\cdot n(n-2)$$

Коэффициент $c_0=2^n\cdot(-1)^n\cdot x_1\cdot x_2\cdot...\cdot x_n=2^n\cdot(-1)^n(-\frac{1}{2})\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{3}{2}\cdot...\cdot\frac{2n-3}{2}=(-1)^{n+1}\left(2n-3\right)!!$

2. Ответ: $a\in\left[1;7\right]$

Решение.

Преобразование левой части уравнения:

$$f(x)=\frac{3}{2}\left(1-\cos 2x\right)+4\sqrt{2}\sin x\cos x+\frac{5}{2}\left(1+\cos 2x\right)=4+\cos 2x+2\sqrt{2}\sin 2x\ .$$

Область значений функции $a\sin 2x + b\cos 2x$ равна $E=\left[-\sqrt{a^2+b^2};\sqrt{a^2+b^2}\right]$, поэтому $E_f=[4-3;4+3]=[1;7]$.

Уравнение тогда и только тогда имеет решения, если a принадлежит E_f.

3. Ответ: $S_b(n)=b\cdot n+\dfrac{a+b+c}{3}\left(S(n)-n\cdot S(1)\right)=4n+6\left(S(n)-n\cdot S(1)\right)$

Решение.

Последовательность $\{b_n\}$ – арифметическая прогрессия:

$b_{n+1}-b_n=\dfrac{a_{a(n+1)}-a_{an}+a_{b(n+1)}-a_{bn}+a_{c(n+1)}-a_{cn}}{3}=\dfrac{d_a(a+b+c)}{3}$ не зависит от n и ее разность $d_b=\dfrac{a+b+c}{3}d_a=\dfrac{a+b+c}{3}\left(S(2)-2S(1)\right)$. Здесь d_a – разность прогрессии a_n.

Тогда $b_n=b_1+d_b(n-1)$, где $b_1=\dfrac{S(a)-S(a-1)+S(b)-S(b-1)+S(c)-S(c-1)}{3}$.

Сумма n членов прогрессии b_n равна

$$S_b(n)=b_1\cdot n+d_b\cdot\frac{n(n-1)}{2}=b_1n+\frac{a+b+c}{3}d_a\cdot\frac{n(n-1)}{2}=b_1n+\frac{a+b+c}{3}\left(S(n)-a_1n\right)=$$

$$=\left(b_1-\frac{a+b+c}{3}a_1\right)\cdot n+\frac{a+b+c}{3}\cdot S(n)=b_1\cdot n+\frac{a+b+c}{3}\left(S(n)-n\cdot S(1)\right)=$$

$$=b\cdot n+\frac{a+b+c}{3}\left(S(n)-n\cdot S(1)\right)$$

4. Ответ: $P(A)=\dfrac{2}{5!}=\dfrac{1}{60}$

Решение. Событие A_1 – первая буква слова П. $P(A_1)=\dfrac{1}{5}$. Событие A_2 – вторая буква слова А.

Вероятность события A_2 при условии, что событие A_1 произошло $P(A_2/A_1)=\dfrac{2}{4}=\dfrac{1}{2}$.

Событие A_3 –третья буква Л. Его вероятность при условии, что событие $A_1\cdot A_2$ произошло равна $P(A_3/A_1\cdot A_2)=\dfrac{1}{3}$. Наконец, событие A_4 – четвертая буква слова К. Вероятность этого события при условии, что событие $A_1\cdot A_2\cdot A_3$ произошло равно $P(A_4/A_1\cdot A_2\cdot A_2)=\dfrac{1}{2}$. Тогда вероятность события $A_1\cdot A_2\cdot A_3\cdot A_4$ равна произведению полученных дробей $\dfrac{1}{5}\cdot\dfrac{1}{2}\cdot\dfrac{1}{3}\cdot\dfrac{1}{2}=\dfrac{1}{60}$

5. Ответ: 1) 44 целых решений 2) $a=k\in Z$

Решение.

Перепишем систему в виде $\begin{cases}3\le x\le 12\\-12-3a\le x+3y\le -3a\end{cases}$. Множество целых ее решений является объединением по параметру b целых решений систем $\begin{cases}3\le x\le 12,\\x+3y=b,\quad b\in[-12-3a;-3a]\end{cases}$.

Уравнение $x+3y=b$ имеет целые решения только при целых b, причем $\begin{cases}x=b-3t\\y=t,t\in Z\end{cases}$.

Ограничение на x приводят к неравенству $3 \le b-3t \le 12 \to b/3-4 \le t \le b/3-1$. Если b делится на 3, то ему соответствует 4 (максимальное число) целых t на отрезке $[b/3-4; b/3-1]$ длины 3, а значит 4 целых решений системы. Если b не делится на 3, то количество таких решений 3.

Случай 1. a - целое число.

Тогда на отрезке $[-12-3a; -3a]$ пять (максимальное число) целых чисел b, делящихся на 3, дающих по 4 целых решения системы каждое и 8 целых чисел b, не делящихся на 3, дающих по 3 решения . Общее число решений системы в этом случае равно $N_1 = 5\cdot 4 + 8\cdot 3 = 44$.

Случай 2. $a = \dfrac{k}{3},\ k \in Z$.

Тогда на отрезке $[-12-3a; -3a]$ также находится 13 (максимальное число) целых значений b, из которых только 3 делятся на 3, а остальные 10 на 3 не делятся и дают по 3 решения каждое.

Всего целых решений $N_2 = 3\cdot 4 + 10\cdot 3 = 42$

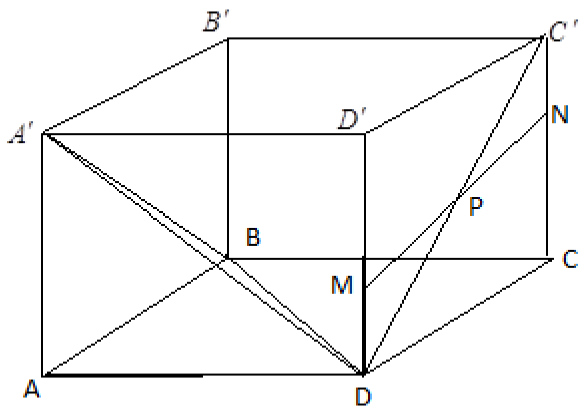
Случай 3. $3a$ - не целое число.

Тогда на отрезке $[-12-3a; -3a]$ только 11 целых чисел b, среди них не более 3 делящихся на 3.

Общая сумма N_3 целых решений не превосходит N_2 .

6. Ответ: $V_{PBDA'} : V_{\text{куба}} = \dfrac{n}{3(n+m)} = 4:21$

Решение.



Объем пирамиды $C'A'BD$ равен $\dfrac{1}{3}V_{\text{куба}}$. Отношение объемов пирамид $V_{PA'BD} : V_{C'A'BD} = DP : DC'$.

Отношение $DP : PC' = DM : NC' = n : m$. $DP : DC' = \dfrac{DP}{DP+PC'} = \dfrac{DP/PC'}{DP/PC'+1} = \dfrac{n/m}{n/m+1} = \dfrac{n}{m+n}$.

Объединяя, $V_{PA'BD} = \dfrac{n}{3(m+n)} V_{\text{куба}}$

2.11. Выездной отборочный тур олимпиады «Росатом», 11 класс, комплект 2

Ответы и решения

1. Ответ: $f \in \left[\left(\sqrt{65}-2\right)^2-20;\left(\sqrt{65}+2\right)^2-20\right]=\left[49-4\sqrt{65};49+4\sqrt{65}\right]$

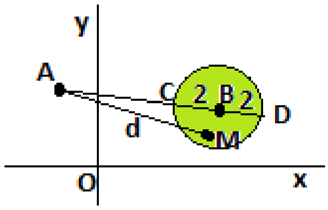
Решение.

Преобразуем выражение и неравенство:

$f=x^2+y^2+4x-8y=(x+2)^2+(y-4)^2-20,$

$(x-6)^2+(y-3)^2\le 4$

Величина $d^2=(x+2)^2+(y-4)^2$ является квадратом расстояния между точками $A(-2;4)$ и $M(x;y)$, принадлежащей кругу радиуса 2 с центром в точке $B(6;3)$.



Расстояние между точками A и B равно $\sqrt{65}$. Максимальное значение $d^2_{\max}$ соответствует совпадению точки M с точкой D: $d^2_{\max}=\left(\sqrt{65}+2\right)^2$, а минимальное – с точкой C : $d^2_{\min}=\left(\sqrt{65}-2\right)^2$. Тогда $f_{\min}=\left(\sqrt{65}-2\right)^2-20$, а $f_{\max}=\left(\sqrt{65}+2\right)^2-20$

2. Ответ: $x=\arccos\dfrac{2}{\sqrt{5}}=arctg\dfrac{1}{2}$, $y=\dfrac{1}{\sqrt{5}}$

Решение.

Ограничения: $\begin{cases} x=\arccos 2y : |y|\le\dfrac{1}{2},\ x\in[0;\pi] \\ y=\sin x : y\in[0;1]\end{cases} \to \begin{cases} x\in[0;\pi] \\ 0\le y\le 0,5\end{cases}$.

Решение системы: $\begin{cases} x=\arccos 2y \\ y=\sin x\end{cases} \to y=\sin\left(\arccos 2y\right)=\sqrt{1-\cos^2\left(\arccos 2y\right)}=\sqrt{1-4y^2}$.

С учетом ограничений: $y^2=1-4y^2 \to y=\dfrac{1}{\sqrt{5}} \to x=\arccos\dfrac{2}{\sqrt{5}}$

3. Ответ: $x=\dfrac{1}{2\sqrt{2}}$, $y=\dfrac{1}{\sqrt{2}}$

Решение.

Ограничения: $0 \le x \le \frac{1}{2},\ 0 \le y \le 1$

Решение системы:

Берем косинус от правой и левой частей первого уравнения: $2x = \sqrt{1-y^2} \to 4x^2 + y^2 = 1$.

Преобразование второго уравнения: $\left[\begin{array}{l} 2x = y + 2\pi k \\ 2x = \pi - y + 2\pi k \end{array}\right.$. С учетом ограничений вторая серия не реализуется ни при каких k, а первая возможна только при $k = 0$, т.е. $y = 2x$.

Тогда система $\begin{cases} 4x^2 + y^2 = 1 \\ y = 2x \end{cases}$ имеет решение $\begin{cases} x = \dfrac{1}{2\sqrt{2}} \\ y = \dfrac{1}{\sqrt{2}} \end{cases}$, удовлетворяющее ограничениям.

4. Ответ: $P(A) = \frac{23}{81}$

Решение. Событие $A-$ составленное число больше 300 и делится на 3.

Гипотеза H_1- число начинается с цифры 7, гипотеза H_2- цифра 7 в записи числа находится на второй позиции, H_3- цифра 7 – последняя. По условию, $P(H_1) = P(H_2) = P(H_3) = 1/3$.

В гипотезе H_1 событие A реализуется, если для числа $\overline{7yz}$ выполнено одно из условий:

1) $y+z=2$ 2) $y+z=5$ 3) $y+z=8$ 4) $y+z=11$ 5) $y+z=14$ 6) $y+z=17$

(тогда сумма цифр числа делится на 3, условие : «число больше 300» выполняется всегда).

Общее число исходов $n = 9 \times 9 = 81$. Число исходов, благоприятствующих событию A в условиях гипотезы H_1 и условия 1) равно 1, в условии 2) – 4 , в условии 3) – 7 ,в условии 4) – 8 , в условии 5) – 5 , в условии 6) – 2, т.е. всего 27 исходов. Тогда $P(A/H_1) = \frac{27}{81} = \frac{1}{3}$

В гипотезе H_2 число $\overline{x7z}$ благоприятствует событию A , если $x \ge 3$ и цифры x и z удовлетворяют одному из условий:

1) $x+z=5$ 2) $x+z=8$ 3) $x+z=11$ 4) $x+z=14$ 5) $x+z=17$

Число благоприятных исходов в условии 1) равно – 2 , в условии 2) – 5 , в условии 3) – 7 , в условии 4) – 5 , в условии 5) – 2 . Всего 21 исход благоприятствует событию A в гипотезе H_2, т.е. $P(A/H_2) = \frac{21}{81} = \frac{7}{27}$.

В гипотезе H_3 число благоприятных исходов также равно 21 и $P(A/H_3) = \frac{7}{27}$.

Тогда $P(A) = P(A/H_1)\cdot P(H_1) + P(A/H_2)\cdot P(H_2) + P(A/H_3)\cdot P(H_3) = \frac{1}{3}\left(\frac{1}{3} + \frac{14}{27}\right) = \frac{23}{81}$.

5. Ответ: 1) $a = m + \frac{1}{2}, m \in Z$ 2) $a = m \pm \frac{1}{3}, m \in Z$

Решение.

Заметим, что уравнение $y - 4 = a(x-7)$ имеет решение $x = 7, y = 4$ при любых a. Если уравнение при некотором a имеет другое допустимое целое решение $(x_1; y_1)$, то его решением является также $(x_2; y_2)$, где $x_2 = 14 - x_1,\ y_2 = 8 - y_1$. Точки плоскости с координатами $(x_1; y_1)$ и $(x_2; y_2)$ симметричны относительно точки $(7;4)$. Уравнение будет иметь три целых решения, если существует единственное целое решение $(x;y)$, для которого $x=4,5$ или 6, т.е. ровно одно из чисел $b_1=-3a+4,\ b_2=-2a+4,\ b_3=-a+4$ будет целым.

Случай 1. b_3 - целое.

Тогда a - целое и b_1, b_2 также целые . Уравнение имеет 7 решений.

Случай 2. b_2 - целое.

Тогда $2a$ целое и $a_2=\dfrac{k}{2}$ при $k\in Z$. При $a=a_2$ число b_3 не будет целым, если $k=2m+1,\ m\in Z$ нечетное число, т.е. $a_2=m+\dfrac{1}{2}$. В этом случае число $b_1=-3m+\dfrac{5}{2}$ не целое, поэтому $a_2=m+\dfrac{1}{2}$ допустимое значение параметра.

Случай 3. b_1 - целое.

Тогда $a_3=\dfrac{k}{3}, k\in Z$. В этом случае число $b_2=-\dfrac{2k}{3}+4$ не будет целым, если $k\neq 3m$, т.е. $k_1=3m+1$ или $k_2=3m-1$. Допустимые значения параметра нужно искать среди чисел $a_3'=m+\dfrac{1}{3},\ m\in Z$ или $a_3''=m-\dfrac{1}{3},\ m\in Z$. В обоих случаях b_3 целым не является.

6. Ответ: $S_{\min}=\sqrt{R^2-r^2}+r\left(\theta-\arccos\dfrac{r}{R}\right)$

Решение.

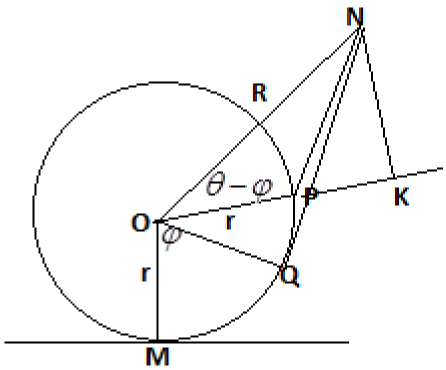


Рис.

$P-$ точка выхода прямолинейного участка пути на границу круга, $\measuredangle POM=\varphi-$ параметр, определяющий положение точки P на окружности. Угол $\measuredangle NOP=\theta-\varphi$, длина прямолинейного отрезка пути $NP=\sqrt{R^2+r^2-2Rr\cos(\theta-\varphi)}$, длина дуги $PM=r\varphi$. Тогда $S(\varphi)=\sqrt{R^2+r^2-2Rr\cos(\theta-\varphi)}+r\varphi$, где $\varphi\in[\varphi_{\text{кас}};\theta]$, $\theta-\varphi_{\text{кас}}=\arccos\dfrac{r}{R}$.

Исследование функции $S(\varphi)$ на отрезке $\varphi\in[\varphi_{\text{кас}};\theta]$.

Критические точки: $S'(\varphi)=-\dfrac{Rr\sin(\theta-\varphi)}{\sqrt{R^2+r^2-2Rr\cos(\theta-\varphi)}}+r=0\rightarrow\sqrt{R^2+r^2-2Rr\cos(\theta-\varphi)}=R\sin(\theta-\varphi)$.

Возводим в квадрат:

$$R^2(1-\cos^2(\theta-\varphi))=R^2+r^2-2Rr\cos(\theta-\varphi)\rightarrow R^2\cos^2(\theta-\varphi)-2Rr\cos(\theta-\varphi)+r^2=0$$

$$\cos(\theta-\varphi)=\frac{r}{R}$$

т.е. критическая точка с левым концом отрезка $\varphi_{\text{кас}}$.

Покажем, что $S'(\varphi)\geq 0$ для всех $\varphi\in[\varphi_{\text{кас}};\theta]$. Действительно,

$$-\frac{Rr\sin(\theta-\varphi)}{\sqrt{R^2+r^2-2Rr\cos(\theta-\varphi)}}+r\geq 0\to\sqrt{R^2+r^2-2Rr\cos(\theta-\varphi)}\geq R\sin(\theta-\varphi)$$

Правая часть неравенства – длина отрезка NP , левая – длина отрезка NK (перпендикуляр, см. рис.). Наклонная всегда длиннее перпендикуляра.

Таким образом, минимум достигается на левом конце (P должно совпасть с $Q-$ точкой касания).

Вычисление значений функции $S(\varphi)$ при $\varphi=\varphi_{\text{кас}}$

1) $\theta-\varphi_{\text{кас}}=\arccos\frac{r}{R}\to\varphi_{\text{кас}}=\theta-\arccos\frac{r}{R}$,

$$S(\varphi_{\text{кас}})=\sqrt{R^2+r^2-2Rr\cdot\frac{r}{R}}+r\left(\theta-\arccos\frac{r}{R}\right)=\sqrt{R^2-r^2}+r\left(\theta-\arccos\frac{r}{R}\right).$$

Замечание о других возможных путях, соединяющих точки N и M с учетом ограничений:

1) Все отрезки оптимального пути вне круга должны быть прямолинейными;

2) путь, составленный из более чем двух прямолинейных отрезков, не может быть оптимальным;

3) путь, состоящий из двух прямолинейных отрезков, хотя бы один из которых не касается окружности не может быть оптимальным;

4) путь, состоящий из двух прямолинейных отрезков, касающихся окружности, изображен на рис.2

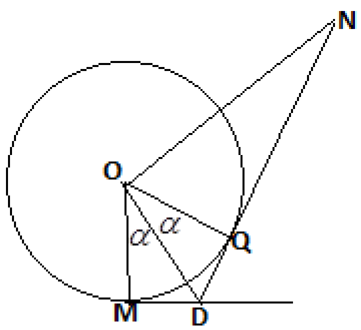


Рис. 2

$QD+DM=2rtg\alpha>2r\alpha$, так как $tg\alpha>\alpha$ в первой четверти. Поэтому длина такого пути больше пути $NQ+$ дуга QM .

2.12. Выездной отборочный тур олимпиады «Росатом», 11 класс, комплект 3

Ответы и решения

1. Ответ: 1) $a=-\dfrac{1}{3},\ b=\dfrac{2}{3},$ 2) $T(x)=x+1$

Решение.

Условие деления с остатком: $x^3+3\left(a+b\right)x^2+\left(b-a\right)x+2\equiv(Ax+B)(x^2-1)+2x+3$ (*) для всех $x\in R$. Здесь $T(x)=Ax+B$ многочлен неполного частного.

Подставляем в тождество (*) $x=1$ и $x=-1$:

$$\begin{cases}1+3a+3b+b-a+2=5\\-1+3a+3b+a-b+2=1\end{cases}\rightarrow\begin{cases}a+2b=1\\2a+b=0\end{cases}\rightarrow\begin{cases}a=-1/3\\b=2/3\end{cases}.$$

Подставляем найденные значения в коэффициенты многочлена $P(x)$:

$P(x)=x^3+x^2+x+2=(Ax+B)(x^2-1)+2x+3$.

Тогда $x^3+x^2-x-1=(Ax+B)(x^2-1)\rightarrow(x+1)(x^2-1)=(Ax+B)(x^2-1)\rightarrow T(x)=x+1$

2. Ответ: 1) $x=7/12+2k, k\in Z$ 2) $x=-1/4+2k$, $k\in Z$

Решение.

Для всех $x\in\left[n;n+1\right)$, $n\in Z$ число $\left[x\right]=n$.

Случай 1. $n=2m$

Тогда на всех интервалах числовой оси вида $\left[2m;2m+1\right)$ уравнение примет вид: $\sin(\pi x)+\cos(\pi x)=\dfrac{\sqrt{2}}{2}\rightarrow\sin\left(\pi x+\pi/4\right)=1/2$.

Его решения $\left[\begin{array}{l}x=-1/12+2k\ \ (*)\\x=7/12+2k\ \ (**)\end{array}\right.,\ k\in Z$. Значения x из серии (*) не удовлетворяют случаю 1.

Решения из серии (**) лежат на полуинтервалах с четными левыми концами и удовлетворяют случаю 1.

Случай 2. $n=2m-1$

Тогда на всех интервалах числовой оси вида $\left[2m-1;2m\right)$ уравнение примет вид:

$$2\cos(\pi x)=\sqrt{2}\rightarrow\left[\begin{array}{l}x=1/4+2k\ \ (*)\\x=-1/4+2k\ \ (**)\end{array}\right.,\ k\in Z$$

Решения из серии (*) не удовлетворяют условиям случая 2, а решения (**) – удовлетворяют.

3. Ответ: $НОД(x_1,x_2,x_3)=2$, $НОК(x_1,x_2,x_3)=210$

Решение.

Разложим свободный член уравнения на простые делители: $4200=2^3\cdot3\cdot5^2\cdot7$.

Если $p-$ простой, общий делитель корней, $4200=x_1\cdot x_2\cdot x_3$ делится на p^3 . Разложение числа 4200 на множители показывает, что таким общим делителем может быть только $p=2$.

Докажем, что каждый из корней делится на 2. Предположим противное, например, x_1 не делится на 2. По условию, $x_1^3-86x_1^2+1180x_1-4200=0\rightarrow x_1^3=86x_1^2-1180x_1+4200$. Такого равенства быть не может, поскольку слева находится нечетное число, а справа – четное, т.е. $НОД(x_1,x_2,x_3)=2$. Покажем, что ни один из корней уравнения не делится на 5^2 . Действительно, если один из корней , например, x_1, делится на 5^2, то из равенства $x_1^3-86x_1^2+1180x_1-4200=0$ следует, что $x_1^3-86x_1^2+1180x_1=4200$. В левой части равенства x_1^3 и x_1^2 делятся на 5^3 . Поскольку $1180=5\cdot2^2\cdot59$, $1180x_1$ также делится на 5^3, т.е. левая часть равенства делится на 5^3, а правая – нет. Таким образом, в НОК корней множитель 5 входит в первой степени. То же можно сказать о множителе 2 . Очевидно, что и остальные делители числа 4200, входившие в него в первых степенях, также входят в НОК в первых степенях. $НОК(x_1,x_2,x_3)=2\cdot5\cdot3\cdot7=210$.

4. Ответ: 1) $\begin{cases} x=\pi/2+2\pi m, \\ y=(-1)^n\pi/6+\pi n, \quad m,n,k\in Z \\ z=-\pi/2+2\pi k, \end{cases}$ 2) $\begin{cases} x=\pi/2+2\pi m, \\ y=-\pi/2+2\pi k, \quad m,n,k\in Z \\ z=(-1)^n\pi/6+\pi n, \end{cases}$.

Решение.

Замена: $u=\sin x,\ v=\sin y,\ w=\sin z$. Алгебраическая система $\begin{cases} u+v+w=1/2 \\ uv+uw+vw=-1 \\ uvw=-1/2 \end{cases}$ имеет решения $(u;v;w)$ являющиеся корнями кубического уравнения (теорема Виета) $t^3-0,5t^2-t+0,5=0\to2t^3-t^2-2t+1=0$.

Разложим левую часть уравнения на множители : $2t(t^2-1)-(t^2-1)=(t-1)(t+1)(2t-1)=0$.

Наибольшему значению $\sin x$ соответствуют тройки $u=1,\ v=1/2,\ w=-1$ и $u=1,\ v=-1,\ w=1/2$

Для первой тройки $\begin{cases} x=\pi/2+2\pi m, \\ y=(-1)^n\pi/6+\pi n, \quad m,n,k\in Z \\ z=-\pi/2+2\pi k, \end{cases}$, для второй $\begin{cases} x=\pi/2+2\pi m, \\ y=-\pi/2+2\pi k, \quad m,n,k\in Z \\ z=(-1)^n\pi/6+\pi n, \end{cases}$.

5. Ответ: $a=-4$

Решение.

Исследование и построение графика функции $a=\dfrac{x-5}{\sqrt{|x-1|}}$.

1) определена для $x\neq1$, имеет вертикальную асимптоту $x=1$.

2) критические точки:

а) в области $x>1$ производная $a'=\dfrac{x+3}{2(x-1)^{3/2}}>0$ - критических точек нет, монотонно возрастает.

б) в области $x<1$ производная $a'=\dfrac{-x-3}{2(1-x)^{3/2}}$ обращается в ноль при $x=-3$, при $x<-3$ функция возрастающая, при $-3<x<1$ - убывающая. В точке $x=-3$- локальный максимум, $a(-3)=-4$.

в) график.

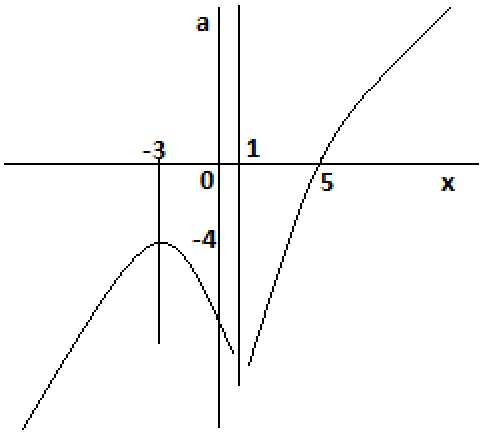


Рис. 1

Уравнение $a\sqrt{|x-1|}=(x-5)$ имеет два решения только при $a=-4$.

При значении $a=-4$ первое уравнение имеет вид: $20-4x=\sqrt{|x-1|}$.

Решение уравнения (графическое) :

На рис. 2 изображены графики функций $y_1=20-4x$ и $y_2=\sqrt{|x-1|}$. Абсциссы их общих точек являются решениями первого уравнения.

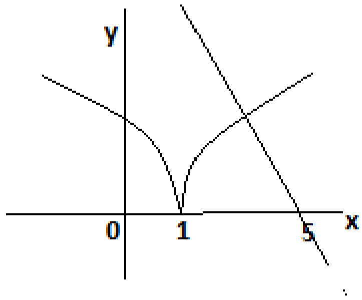


Рис. 2

Докажем, что прямая $y=20-4x$ не пересекает левую ветвь $y=\sqrt{1-x}$:

$$\begin{cases}(20-4x)^2=1-x\\ x\le 1\end{cases}\rightarrow 16x^2-161x+399=0\rightarrow x_{1,2}=\frac{161\pm\sqrt{385}}{32}\approx(4,4;5,6) .$$

Таким образом, первое уравнение имеет только одно решение при $x>1$.

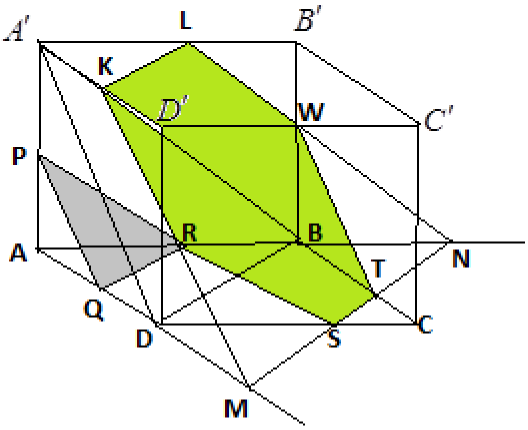
6. Ответ: 1) $S_1=\frac{3\sqrt{3}}{2}$ 2) $S_2=6\sqrt{6}$

Вариант 0

В кубе $ABCDA'B'C'D'$ с ребром a проведено сечение плоскостью, параллельной плоскости BDA' и отстоящей от нее на расстояние равное b . Найти площадь сечения.

Ответ: 1) $S_1=\frac{\sqrt{3}}{2}\left(a-b\sqrt{3}\right)^2$ при $a>b\sqrt{3}$ 2) $S_2=\frac{\sqrt{3}}{2}\left(a^2+2ab\sqrt{6}-12b^2\right)$ при $a>b\sqrt{6}$

Решение.



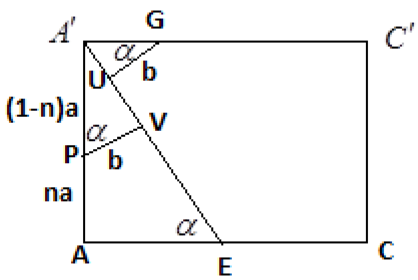


Рис. 1 Рис. 2

Случай 1. Сечение проходит через точку P на ребре AA' , $AP=na, 0<n<1$, удаленную от плоскости BDA' на расстояние b .

Рассмотрим сечение куба плоскостью, проходящей через параллельные ребра AA' и CC' (рис. 2). Эта плоскость перпендикулярна плоскостям искомых сечений.

$AE-$ медиана треугольника $A'BD$, наклонена к основанию куба под углом $\alpha: tg\alpha=\sqrt{2},\ \cos\alpha=\frac{1}{\sqrt{3}}$.

Перпендикуляр PV , опущенный из точки P на плоскость BDA' лежит в плоскости $AA'C'C$, его длина по условию равна b . Тогда $(1-n)a=\dfrac{b}{\cos\alpha}=b\sqrt{3}\to n=1-\dfrac{b\sqrt{3}}{a}=\dfrac{a-b\sqrt{3}}{a}\in(0,1)\to a>b\sqrt{3}$. Треугольник PQR сечения подобен треугольнику $A'DB$ с коэффициентом подобия n , поэтому

$$S_{PQR}=n^2\cdot S_{A'DB}=\frac{(a-b\sqrt{3})^2}{a^2}\cdot\frac{\sqrt{3}}{4}2a^2=\frac{\sqrt{3}}{2}\left(a-b\sqrt{3}\right)^2 .$$

В варианте 1 $a=2\sqrt{3},\ b=1$, поэтому площадь сечения S_1 в случае 1 равна $S_1=\dfrac{3\sqrt{3}}{2}$

Случай 2. Сечение проходит через точку G на диагонали $A'C'$, удаленную от плоскости BDA' на расстояние b.

Перпендикуляр GU (рис. 2), опущенный из точки G на плоскость BDA', имеет длину b : $A'G=\dfrac{b}{\cos\alpha}=b\sqrt{3}$. Через точку G проводим прямую KL (см.рис.1). параллельную диагонали $B'D'$. $A'K=\sqrt{2}\cdot A'G=b\sqrt{6}$. Через точку K проводим прямую, параллельную диагонали $A'D$ грани до ее пересечения в точке M продолжения ребра AD . Аналогичные действия производим с прямой LN (рис. 1). Соединяем прямой точки M и N , которая пересекает ребра основания куба в точках S и T .

Вычисления: $DM=A'K=b\sqrt{6},\ MS=DM\sqrt{2}=2b\sqrt{3}$,

$AM=a+DM=a+b\sqrt{6},\ MN=\sqrt{2}\cdot AM=a\sqrt{2}+2b\sqrt{3}$.

$ST=MN-2\cdot MS=a\sqrt{2}+2b\sqrt{3}-4b\sqrt{3}=a\sqrt{2}-2b\sqrt{3}>0\to a>b\sqrt{6}$.

Площадь S_2^* проекции сечения в случае 2 равна

$$S_2^*=a^2-S_{A'KL}-S_{TSC}=a^2-3b^2-\frac{1}{4}TS^2=a^2-3b^2-\frac{\left(a\sqrt{2}-2b\sqrt{3}\right)^2}{4}=\frac{a^2+2ab\sqrt{6}-12b^2}{2}.$$

Площадь сечения $S_2=\dfrac{S_2^*}{\cos\alpha}=\dfrac{\sqrt{3}}{2}\left(a^2+2ab\sqrt{6}-12b^2\right)$.

В варианте 1 $a=2\sqrt{3},\ b=1$, т.е. $S_2=6\sqrt{6}$.

2.13. Выездной отборочный тур олимпиады «Росатом», 11 класс, комплект 4

Ответы и решения

1. Ответ : 15 гирь, 23 гири
Решение.
$x-$ число использованных гирь по 3 кг. , $y-$ число использованных гирь по 5 кг.
Условие: $3x+5y=71,\ x\ge 0,\ y\ge 0$. Общее решение уравнения:
$\begin{cases} x=7+5t \\ y=10-3t \end{cases},\ t\in Z \to 7+5t\ge 0,\ 10-3t\ge 0 \to t\in[-1;3]$
Общее число гирь: $x+y=17+2t$ принимает наименьшее значение при $t=-1$ равное 15 и наибольшее значение при $t=3$ равное 23 .

2. Ответ: $x=\dfrac{29\pi}{12}$
Решение.

Правило раскрытия модуля левой части уравнения: $f=\begin{cases} -\sin 2x\cdot\cos 2x,\ \ x\le -3\pi \\ 0,\ \ x\in(-3\pi;\pi] \\ \sin 2x\cdot\cos 2x,\ \ x\in(\pi;2\pi] \\ \sin 2x,\ \ x\in(2\pi;4\pi] \\ \sin 2x\cdot\cos 2x,\ \ x\in(4\pi;+\infty) \end{cases}$.

Случай 1. $x\le -3\pi$
Решение уравнения: $\sin 4x=-1\to x=-\dfrac{\pi}{8}+\dfrac{\pi k}{2}$. $\sin x$ Ограничение $x\le -3\pi$ приводит выбору $k\le -6$. Наибольшее значение $\sin x$ на этой серии равно $\sin\dfrac{3\pi}{8}$ и достигается для $x=\dfrac{3\pi}{8}+2\pi m,\ m\in Z,\ m\le -2$.
Случай 2. $x\in(-3\pi;\pi]$ решений нет
Случай 3. $x\in(\pi;2\pi]\cup(4\pi;+\infty)$
Решение уравнения: $\sin 4x=1\to x=\dfrac{\pi}{8}+\dfrac{\pi k}{2}$. С учетом ограничения по x, число $k=2,3$ и $k\ge 8$.
Наибольшее значение $\sin x$ на этой серии равно $\sin\dfrac{5\pi}{8}=\sin\dfrac{3\pi}{8}$ и достигается для $x=\dfrac{5\pi}{8}+2\pi m,\ m\in Z,\ m\ge 2$
Случай 4 . $x\in(2\pi;4\pi]$
Решение уравнения: $\sin 2x=0,5\to \left[\begin{array}{l} x=\dfrac{\pi}{12}+\pi k, k=2,3 \\ x=\dfrac{5\pi}{12}+\pi k,\ k=2,3 \end{array}\right.$. Наибольшее значение $\sin x$, равное $\sin\dfrac{5\pi}{12}$, достигается для $x=\dfrac{5\pi}{12}+2\pi=\dfrac{29\pi}{12}$. Поскольку $\sin\dfrac{5\pi}{12}>\sin\dfrac{3\pi}{8}$ ответом является $x=\dfrac{29\pi}{12}$

3. Ответ: $b_{14}:b_6=1:256$

Решение.

$b_n=b_1\cdot q^{n-1},\ b_{n-1}=b_1\cdot q^{n-2},\ b_{n+1}=b_1\cdot q^n$. Тогда условие задачи примет вид:

$2b_{n+1}-3b_n+b_{n-1}=2b_1\cdot q^n-3b_1\cdot q^{n-1}+b_1\cdot q^{n-2}=b_1q^{n-2}\left(2q^2-3q+1\right)=0$.

Для всех $n\geq 2$ равенство возможно, если $2q^2-3q+1=0\rightarrow\begin{cases}q=1\\q=1/2\end{cases}$.

Условие убывания возможно только при $q=1/2$. Тогда $b_{14}:b_6=\dfrac{b_1q^{13}}{b_1q^5}=q^8=1:256$

4. Ответ: $\Sigma=4^n+1$

Решение.

Среди целых чисел $a=2^n,2^n+1,2^n+2,...,2^{n+1}-1,2^{n+1}$, принадлежащих отрезку $\left[2^n;2^{n+1}\right]$, есть нечётные числа $a_k=2^n+2k-1$, $k=1,2,...,2^{n-1}$, для которых $P(a_k)=a_k$. Их сумма S_1 равна сумме 2^{n-1} членов арифметической прогрессии a_k : $S_1=\dfrac{(2^n+1)+(2^{n+1}-1)}{2}\cdot 2^{n-1}=3\cdot 4^{n-1}$.

Оставшиеся на отрезке числа $a=2^n,2^n+2,2^n+4,...,2^{n+1}-2,2^{n+1}$ четные и деление их на 2 не меняет для них $P(a)$, т.е. сумма наибольших делителей для указанных a совпадает с аналогичной суммой для чисел $a=2^{n-1},2^{n-1}+1,2^{n-1}+2,...,2^n-1,2^n$. Сумма $P(a)$ для нечетных из них (см. выше) равна $3\cdot 4^{n-2}$, а остальные (четные) делим на 2, считаем сумму $P(a)$ для нечетных из них равную $3\cdot 4^{n-3}$ и т.д. На последнем этапе останутся два числа 2 и 4 . Сумма делителей $P(a)$ для них равна 2. Таким образом, искомая сумма делителей Σ равна сумме членов геометрической прогрессии:

$3\cdot 4^{n-1}+3\cdot 4^{n-2}+3\cdot 4^{n-3}+...+3\cdot 4^0+2=3\cdot\dfrac{4^n-1}{4-1}+2=4^n+1$.

5. Ответ: 1) $\alpha_1=arctg\dfrac{24}{7}+2\pi k,\ k\in Z$ 2) $\alpha_2=\pi+2\pi k,\ k\in Z$

3) $\alpha_3=arctg\dfrac{4+3\sqrt{24}}{4\sqrt{24}-3}+2\pi k, k\in Z$ 4) $\alpha_4=arctg\dfrac{3\sqrt{24}-4}{4\sqrt{24}+3}+2\pi k, k\in Z$

(возможны другие варианты записи ответов: через другие обратные тригонометрические функции).

Решение (геометрическое)

Прямая с уравнением $x\cos a+y\sin a-2=0$ касается окружности радиуса 2 с центром в начале координат. Система имеет единственное решение, если она касается (общая касательная) окружности с уравнением $x^2+y^2+6x-8y+24=0\leftrightarrow(x+3)^2+(y-4)^2=1$, радиусом 1 и центром в точке $P(-3;4)$. Имеется четыре варианта общих касательных двух непересекающихся окружностей.

Случай 1.

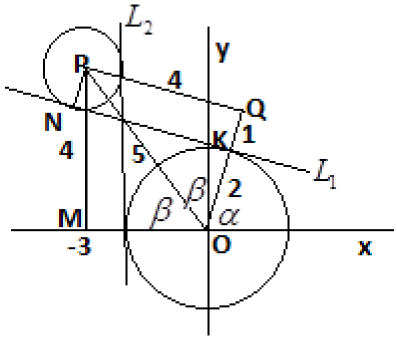


Рис 1

На рис 1 L_1 – общая касательная окружностей, PQ параллельна L_1 , Треугольник OPQ, прямоугольный, с катетами 3 и 4 , равен треугольнику OPM . Угол POQ равен $\beta,\ tg\beta = 4/3$.

Из равенства $\alpha + 2\beta = \pi$ заключаем, что $tg\alpha = -tg2\beta = -\frac{2tg\beta}{1-tg^2\beta} = \frac{24}{7}$ и первая серия решений

$\alpha_1 = arctg\frac{24}{7} + 2\pi k,\ k \in Z$.

Случай 2. Вторая общая касательная L_2 (см рис. 1) перпендикулярна оси OX и соответствует значениям параметра из второй серии $\alpha_2 = \pi + 2\pi k,\ k \in Z$.

Случай 3. Общая касательная L_3 (не пересекает отрезок OP)

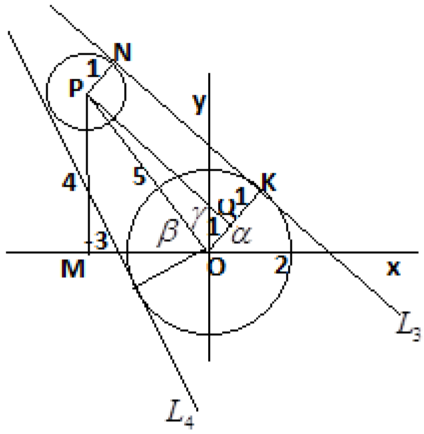


Рис 2

Угол POM равен $\beta,\ tg\beta = 4/3$, длина отрезка $PQ = \sqrt{24}$, угол POQ равен $\gamma,\ tg\gamma = \sqrt{24}$.

Из равенства $\alpha + \beta + \gamma = \pi$ следует, что $tg\alpha = -tg(\beta+\gamma) = -\frac{4/3+\sqrt{24}}{1-4\sqrt{24}/3} = \frac{4+3\sqrt{24}}{4\sqrt{24}-3}$.

Этому значению соответствует третья серия решений: $\alpha_3 = arctg\frac{4+3\sqrt{24}}{4\sqrt{24}-3} + 2\pi k, k \in Z$.

Случай 4. Общая касательная L_4 симметрична касательной L_3 относительно прямой PO, поэтому (см. рис.2) $\alpha_4 = \alpha_3 + 2\gamma$, $tg\alpha_4 = \frac{tg\alpha_3 + tg2\gamma}{1 - tg\alpha_3 \cdot tg2\gamma} = \frac{3\sqrt{24}-4}{4\sqrt{24}+3}$.

Тогда четвертая серия решений равна $\alpha_4 = arctg\frac{3\sqrt{24}-4}{4\sqrt{24}+3} + 2\pi k, k \in Z$.

6. Ответ: 1) $S = 3\pi + 2\sqrt{2} - 6\arcsin\sqrt{\frac{2}{3}} \approx 6{,}52$ 2) $S = 3\arcsin\sqrt{\frac{2}{3}} - \sqrt{2}$

Решение.

Случай 1 положения плоскости T .

Проведем сечение тела G плоскостью L, проходящей через точку O, перпендикулярной плоскостям P и Q. На рис. 1 отрезок $[u;v]$ является следом пересечения плоскостей T и L внутри тела G и составляет угол 45^0 со следами пересечения L с плоскостями P и Q.

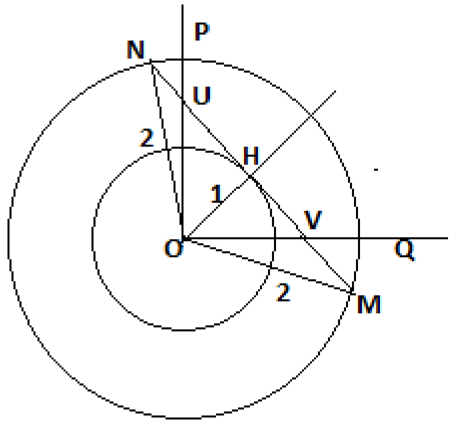


Рис. 1

$HM = HN = r = \sqrt{3}$ - радиус окружности пересечения сферы и плоскости T.
На рис. 2 изображено искомое сечение тела G :

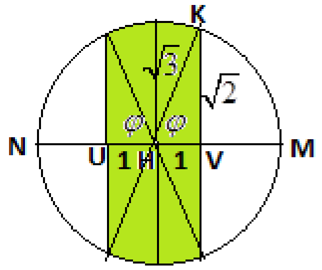


Рис. 2

Вычисление площади сечения: $\sin\varphi = \sqrt{\dfrac{2}{3}} \to \varphi = \arcsin\sqrt{\dfrac{2}{3}}$.

Площадь двух треугольников $S_1 = 2\sqrt{2}$.

Площадь двух секторов с углом $\pi - 2\varphi$: $S_2 = 3\left(\pi - 2\arcsin\sqrt{\dfrac{2}{3}}\right)$.

Площадь сечения: $S = S_1 + S_2 = 3\pi + 2\sqrt{2} - 6\arcsin\sqrt{\dfrac{2}{3}} \approx 6{,}52$

Случай 2 положения плоскости T.
На рис. 3 отрезок $[u;v]$ изображает след пересечения плоскостей T и L внутри тела G.

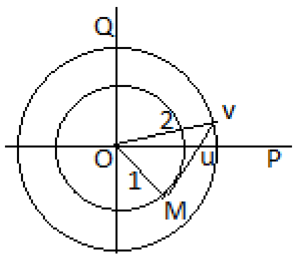


Рис. 3

Отрезок Mv - радиус окружности сечения сферы плоскостью T: $r = \sqrt{3}$ - составляет угол 45^0 с плоскостью P . На рис 4 изображено сечение тела G :

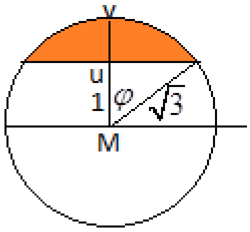


Рис. 4

Его площадь (сегмент) равен $S = 3\arcsin\sqrt{\frac{2}{3}} - \sqrt{2} \approx 1,45$