2.14. Олимпиада имени И.В.Курчатова (отборочный тур олимпиады «Росатом»), 11 класс

Ответы и решения

1. Ответ: 1) $k=2$ 2) $D(n)=(n+1)d$

Решение.

1) $b_{n+1}-b_n=a_{2n+3}-a_{2n+1}=2d$ для любого n , где $d-$ разность прогрессии a_n .

2) $c_{n+1}-c_n=a_{3n+k+3}-a_{3n+k}=3d$ для любого n , где $d-$ разность прогрессии a_n .

Основное свойство прогрессии:

$$a_n+c_n=2b_n \to a_n+a_{3n+k}=2a_{2n+1} \to a_1+d(n-1)+a_1+d(3n+k-1)=2\left(a_1+2nd\right) \to$$

$$\to d(n-1)+d(3n+k-1)=4nd$$

Предполагается, что $d \neq 0$, в противном все прогрессии одинаковые и постоянные и результат очевиден. После сокращения на d и приведения подобных членов , получим $k-2=0 \to k=2$ при любых n .

$$D(n)=b_n-a_n=a_{2n+1}-a_n=d(n+1)$$

2. Ответ: $x=\pm\frac{\pi}{3}+2\pi k,\ k\in Z$

Решение.

$$\cos x\cdot f^{-1}(\sin x)\cdot f\left(\sin^{-1}x\right)=\cos x\cdot\frac{\sin^2 x+1}{\sin^2 x}\cdot\frac{1}{\sin^2 x\left(\frac{1}{\sin^2 x}+1\right)}=\frac{\cos x}{\sin^2 x}=\frac{2}{3}$$

$$3\cos x=2(1-\cos^2 x)\to 2\cos^2 x+3\cos x-2=0\to\left[\begin{array}{l}\cos x=1/2\\ \cos x=-2\to\varnothing\end{array}\right.$$

$$x=\pm\frac{\pi}{3}+2\pi k,\ k\in Z$$

3. Ответ: $a=-1,\ b=\log_2 6$

Решение.

$$b_n=b_1\cdot q^{n-1}=\frac{3}{2^{n-1}},\ \ f(b_n)=a\log_2\left(\frac{3}{2^{n-1}}\right)+b=-a(n-1)+a\log_2 3+b=-an+(a\log_2 3+a+b)\ .$$

Условие $f(b_n)=n$ может выполняться при любых n если $a=-1$, а $b=\log_2 6$.

4. Ответ: $p=\frac{112}{405}$

Решение.

Событие H - полученное число трехзначное. По условию задачи оно было реализовано.

Вероятность $P(H)=\frac{9}{10}$. Событие A - сумма цифр в записи числа делится на 4. Требуется найти условную вероятность $P(A/\mathrm{H})=\frac{P(A\cdot H)}{P(H)}$. Событие H содержит $q=9\cdot 10^2=900$ равновозможных исходов, при этом событию A благоприятствуют исходы, выделяемые условием $x+y+z=4k, k\in Z$ при ограничении $x=1,2,...,9,\ y=0,1,...,9,\ z=0,1,...,9,\ k=1,2,...,6$.

Обозначение: $y=u,\ z=v,\ x=4k-u-v$.

С учетом ограничений, $1\le 4k-u-v\le 9\to 4k-9\le u+v\le 4k-1$.

Обозначим через $n=n(m)$ - число решений уравнения $u+v=m$ при фиксированном m и ограничениях на u и v . Тогда

$$n=\begin{cases} m+1,\ \text{для}\ m\in[0;9]\\ 19-m,\ \text{для}\ m\in[10;18]\\ 0,\ \text{для}\ m\in(-\infty;0)\cup(18;+\infty)\end{cases}$$

При фиксированном k число благоприятных троек x,y,z равно сумме числа решений уравнений $u+v=m$ при всех $m\in[4k-9;4k-1]$

Случай $k=1$. $m\in[-5,3]\to m=0,1,2,3\to n_1=1+2+3+4=10$

Случай $k=2$. $m\in[-1,7]\to m=0,1,2,3,4,5,6,7\to n_2=1+2+3+4+5+6+7+8=36$

Случай $k=3$. $m\in[3,11]\to m=3,...,8,9$ и $m=10,11\to n_3=(4+5+...+9+10)+(8+9)=66$

Случай $k=4$. $m\in[7,15]\to m=7,8,9$ и $m=10,11,...,15\to n_4=(8+9+10)+(4+5+...+9)=66$

Случай $k=5$. $m\in[11,19]\to m=11,..,18$ и $m=19\to n_5=(1+2+...+8)=36$

Случай $k=6$. $m\in[15,23]\to m=15,16,17,18$ и $m>18\to n_6=1+2+3+4=10$

Для получения общего числа p благоприятных троек x,y,z в событии $A\cdot H$ достаточно просуммировать числа $n_1,n_2,...,n_6$: $p=2(10+36+66)=224$

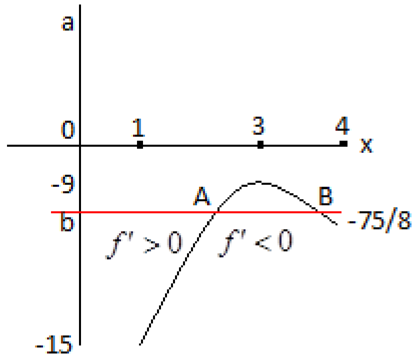
Тогда искомая вероятность равна $P(A\cdot H)=\frac{p}{q}=\frac{224}{9\cdot 100}$. Тогда вероятность

$P(A/H)=\frac{224}{900}\cdot\frac{10}{9}=\frac{112}{405}$

5. Ответ: $a\in\left(-\frac{75}{8};-9\right)$

Решение. В точке локального минимума производная функции равна нулю: $f'(x)=3x^2+2ax+27=0\to a=-\frac{3(x^2+9)}{2x}$. В каждой точке графика функции $a=-\frac{3(x^2+9)}{2x}$ с абсциссой $\tilde{x}$ и ординатой $\tilde{a}$ на плоскости (x,a) функция $f(x)$ имеет нулевую производную в точке $x=\tilde{x}$ при значении параметра $a=\tilde{a}$. Построим график функции $a=-\frac{3(x^2+9)}{2x}$ на отрезке $[1;4]$. $a'=-\frac{3(x-3)(x+3)}{x^2}$. Функция растет на интервале $(1;3)$ и убывает на интервале $(3;4)$.

Значение $a(1)=-15,\ a(3)=-9,\ a(4)=-\frac{75}{8}$.



На рис. изображен график функции $a(x)$ на отрезке $[1;4]$. В каждой точке x интервала $(1;4)$ производная $f'(x)<0$ для всех $a<-\frac{3(x^2+9)}{2x}$ и $f'(x)>0$ для всех $a>-\frac{3(x^2+9)}{2x}$. Любая прямая $a=b,\ b\in\left(-\frac{75}{8};-9\right)$ параллельна оси OX и пересекает график в точках A и B . Абсцисса x_A точки A является точкой интервала $(1;4)$, в которой функция $f(x)$ имеет локальный максимум, а абсцисса x_B - точкой локального минимума , поскольку при переходе через точку x_A производная меняет знак с + на -, а при переходе через точку x_B - наоборот.

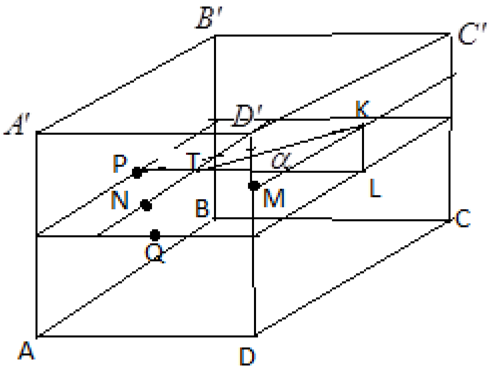
6. Ответ: 1) $S_1=9$ 2) $S_2=\sqrt{85}$

Решение. Длина ребра куба равна a .

Случай 1. Плоскость параллельна основанию $ABCD$.

Тогда плоскость параллельна ребру $D'C'$, а точки P и Q удалены от плоскости на расстояние $d=\left|\frac{a}{2}-1\right|$. Площадь сечения $S_1=a^2$. При $a=3$ $S_1=9$.

Случай 2. Плоскость проходит через середину отрезка PQ.



Точка $N-$ середина отрезка PQ . Искомая плоскость проходит через прямую MK , параллельную ребру $D'C'$, и точку N . Она составляет с плоскостью основания угол $\measuredangle KTL = \alpha$.

$$tg\alpha = \frac{KL}{TL},\ KL = \left|\frac{a}{2} - 1\right| = \frac{|a-2|}{2},\ TL = \frac{3a}{4} \to tg\alpha = \frac{2|a-2|}{3a} \to \frac{1}{\cos\alpha} = \frac{\sqrt{9a^2 + 4(a-2)^2}}{3a}\ .$$

Площадь сечения $S_2 = \dfrac{a^2}{\cos\alpha} = \dfrac{a\sqrt{9a^2 + 4(a-2)^2}}{3}$. При $a = 3$ $S_2 = \sqrt{85}$.