2. Задания олимпиады «Росатом» 2015-2016 учебного года

2.1. Заключительный тур олимпиады «Росатом», 11 класс, комплект 1

Ответы и решения

1. Ответ: 1) 2 пары; 2) (4; 1)
Решение.
Общее решение уравнения $\begin{cases} x = -1 + 5t \\ y = -6 + 7t \end{cases}$, $t \in Z$. Эти решения удовлетворяют неравенству
$(5t-1)^2 + (7t-6)^2 \le 37 \to 37t^2 - 47t \le 0 \to t \in [0; 47/37] \to t_1 = 0, t_2 = 1$
Допустимые пары $(-1;-6)$ и $(4;1)$. Во второй паре значение $x + y$ наибольшее

2. Ответ: $x = \pm \frac{\pi}{3} + 2\pi n,\ n \in Z$
Решение.
Найдем x, при котором каждая из скобок равна нулю.
А.

$\sin^2 x - \cos x - 1/4 = 0 \to \cos^2 x + \cos x - 3/4 = 0 \to \left[\begin{array}{l} \cos x = 1/2 \\ \cos x = -3/2 \varnothing \end{array}\right. \to$

$$\left[\begin{array}{l} x_1 = \dfrac{\pi}{3} + 2\pi k, k \in Z \\ x_2 = -\dfrac{\pi}{3} + 2\pi n, n \in Z \end{array}\right.$$

Б.

$\cos 2x + \cos x = 0 \to \cos 2x = \cos\left(\pi - x\right) \to \left[\begin{array}{l} 2x = \pi - x + 2\pi m, \\ 2x = -\pi + x + 2\pi l \end{array}\right. \to$

$$\to \left[\begin{array}{l} x_3 = \dfrac{\pi}{3} + \dfrac{2\pi m}{3} \\ x_4 = -\pi + 2\pi l \end{array}\right.$$

Пересечением серий $x_1 \cap x_3$ является x_1, т.е. $x = \dfrac{\pi}{3} + 2\pi k, k \in Z$ решение.

Пересечения серий $x_1 \cap x_4$ и $x_2 \cap x_4$ пустые.

Найдем пересечение серий $x_2 \cap x_3$: $-\dfrac{\pi}{3} + 2\pi n = \dfrac{\pi}{3} + \dfrac{2\pi m}{3} \to m = 3n - 1$, т.е. серия x_2 входит в серию x_3 и поэтому является решением.

3. Ответ: 1) $x_n^1 = 3/2^{n-1}$, $x_n^2 = -1/2^{n-2}$; 2) $\dfrac{3(2^n - 1)}{4^n - 1}$

Решение.

Корни многочлена $P_1(x) = x^2 - x - 6$ равны $x_1^1 = 3$, $x_1^2 = -2$. Корни многочлена $P_2(x) = P_1(2x)$ равны $x_2^1 = 3/2$, $x_2^2 = -2/2 = -1$. Предполагаем, что корни многочлена $P_k(x)$ равны $x_k^1 = 3/2^{k-1}$, $x_k^2 = -2/2^{k-1} = -1/2^{k-2}$. Тогда многочлен $P_{k+1}(x) = P_k(2x)$ будет иметь корни $x_{k+1}^1 = x_k^1/2 = 3/2^k$, $x_{k+1}^2 = x_k^2/2 = -1/2^{k-1}$, т.е. $x_n^1 = 3/2^{n-1}$, $x_n^2 = -1/2^{n-2}$.

Многочлен $P_k(x)$ имеет вид $P_k(x) = 4^{(k-1)}x^2 - 2^{k-1}x - 6$, а многочлен $Q_n(x) = \left(1 + 4 + ... + 4^{n-1}\right)x^2 - \left(1 + 2 + ... + 2^{n-1}\right)x - 6n = \dfrac{4^n - 1}{3}x^2 - \left(2^n - 1\right)x - 6n$.

Дискриминант многочлена $Q_n(x)$ равен $D/4 = (2^n - 1)^2 + 8n(4^n - 1) > 0$, поэтому действительные корни есть. По теореме Виета их сумма равна $\dfrac{3(2^n - 1)}{4^n - 1}$.

4. Ответ: 5 рублей.

Решение.

Вероятность выигрыша Пети $p = \dfrac{6}{36} = \dfrac{1}{6}$ (общее число исходов опыта $n = 6 \cdot 6 = 36$, из них благоприятствуют выигрышу 6 исходов: $(1;1), (1;2), (1;3), (2;1), (2;2), (3;1)$)

Пусть ξ - случайная величина выигрыша Пети. Она принимает значение k с вероятностью $\dfrac{1}{6}$ и значение -1 с вероятностью $\dfrac{5}{6}$. Тогда среднее значение выигрыша $M\xi = k \cdot \dfrac{1}{6} - 1 \cdot \dfrac{5}{6} = 0 \to k = 5$.

5. Ответ: $a \in \left[\dfrac{2}{11}; \dfrac{2}{9}\right) \cup \left[\dfrac{2}{7}; +\infty\right)$

Решение.

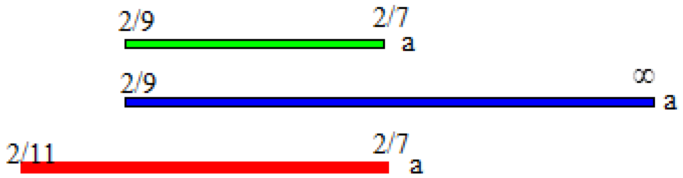
В области $A(x>a, y>2a)$ система примет вид: $\begin{cases} x+y=5a \\ x+2y=2 \end{cases} \to \begin{cases} x_1=10a-2 \\ y_1=2-5a \end{cases}$. Это решение принадлежит области A, если $\begin{cases} 10a-2>a \\ 2-5a>2a \end{cases} \to a\in\left(\frac{2}{9};\frac{2}{7}\right)$.

В области $B(x>a, y\le 2a)$ система примет вид: $\begin{cases} x=5a \\ x+2y=2 \end{cases} \to \begin{cases} x_2=5a \\ y_2=(2-5a)/2 \end{cases}$. Это решение принадлежит области B, если $\begin{cases} 5a>a \\ (2-5a)/2\le 2a \end{cases} \to a\in\left[\frac{2}{9};+\infty\right)$.

В области $C(x\le a, y\le 2a)$ система может иметь решения только при $a=0$ и имеет вид:
$\begin{cases} 0=5a \\ x+2y=2 \end{cases} \to \begin{cases} x_3=2-2t \\ y_3=t,\ t\in R \end{cases}$. Условия принадлежности решения к области С приводит к неравенствам $\begin{cases} 2-2t\le 0 \\ t\le 0 \end{cases} \to \begin{cases} t\ge 1 \\ t\le 0 \end{cases}$. Последнее показывает, в области С система несовместна при любых a.

В области $D(x\le a, y>2a)$ система примет вид: $\begin{cases} y=5a \\ x+2y=2 \end{cases} \to \begin{cases} x_3=2-10a \\ y_3=5a \end{cases}$. Это решение принадлежит области D, если $\begin{cases} 2-10a\le a \\ 2-5a>2a \end{cases} \to a\in\left[\frac{2}{11};\frac{2}{7}\right)$.

На рис. На трех числовых осях параметра a указаны интервалы существования решений.



Зеленый интервал, соответствует значениям a, при которых существуют решения $(x_1;y_1)$, синяя полуось – решениям $(x_2;y_2)$, а красная – решениям $(x_3;y_3)$. Единственное решение бывает при
$a\in\left[\frac{2}{11};\frac{2}{9}\right)\cup\left[\frac{2}{7};+\infty\right)$

Замечание. Совпадений решений $(x_2;y_2)$ и $(x_3;y_3)$ при $a=\frac{2}{9}$ не происходит. Внутри интервала $\left(\frac{2}{9};\frac{2}{7}\right)$ совпадение трех решений не происходит.

6. Ответ: $\Sigma_{\max}=\frac{\pi}{4}\left(\left(\sqrt{2a}-\sqrt{b}\right)^4+6\left(3-2\sqrt{2}\right)b^2\right)=4\pi\left(19-12\sqrt{2}\right)\approx 25{,}5$

Вариант 0

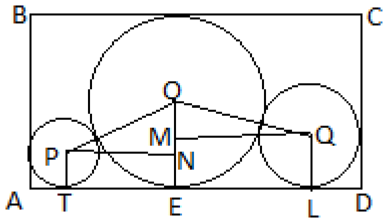
В прямоугольнике $ABCD$ со сторонами $AD=a$, $AB=b$ ($b<a<2b$) расположены три круга K, K_1 и K_2. Круг K касается кругов K_1, K_2 внешним образом, а также прямых AD и BC. Круги K_1, K_2 касаются также сторон AD, AB и AD, CD соответственно. Найти максимальное и минимальное возможное значение суммы площадей трех кругов.

Ответ: $S_{\max}=\pi\left(R^2+\rho^2+r^2\right)_{\max}=\frac{\pi}{4}\left(6(3-2\sqrt{2})b^2+(\sqrt{2a}-\sqrt{b})^4\right)$ (*),

$$S_{\min} = \pi\left(R^2+\rho^2+r^2\right) = \pi\left(\frac{b^2}{4}+\frac{\left(\sqrt{a+b}-\sqrt{b}\right)^4}{2}\right) \quad (**)$$

Решение.

Пусть $\rho, r, R-$ радиусы окружностей K_1, K_2, K . $b=2R$.



$AE = x-$ переменная, $x\in[R;a-R]$, $TE = PN = x-\rho = 2\sqrt{R\rho}$,

$EL = QM = 2\sqrt{Rr} = a-x-r$, $OP = R+\rho,\ OQ = R+r,\ OM = R-r,\ ON = R-\rho$.

Условия $\begin{cases} \rho+2\sqrt{R}\cdot\sqrt{\rho}-x=0 \\ r+2\sqrt{R}\cdot\sqrt{r}-a+x=0 \\ \rho^2+r^2\to\max \end{cases}$ приводят к зависимости r и ρ от x в виде

$\begin{cases} \rho=\left(\sqrt{x+R}-\sqrt{R}\right)^2 \\ \rho=\left(\sqrt{a-x+R}-\sqrt{R}\right)^2 \end{cases}$. Обозначая через $\varphi(x)=\left(\sqrt{x+R}-\sqrt{R}\right)^4$ приходим к тому, что

$\rho^2+r^2=\varphi(x)+\varphi(a-x)$.

Свойства функции $\varphi(x)$: 1) $\varphi(x)\uparrow$ на отрезке $[R;a-R]$

2) $\varphi'(x)=\dfrac{2\left(\sqrt{x+R}-\sqrt{R}\right)^3}{\sqrt{x+R}}>0,\ x\in[R;a-R]$

3) $\varphi''=\dfrac{\left(\sqrt{x+R}-\sqrt{R}\right)^2\left(2\sqrt{x+R}+\sqrt{R}\right)}{\left(\sqrt{x+R}\right)^3}>0,\quad x\in[R;a-R]$, т.е. функция

$\varphi'(x)\uparrow$ на отрезке $[R;a-R]$.

Критические точки функции:

$(\rho^2+r^2)'=\varphi'(x)-\varphi'(a-x)=0\to\varphi'(x)=\varphi'(a-x)\to x=a-x\to x^*=\dfrac{a}{2}$

На концах отрезка значения функции $\rho^2+r^2=\varphi(x)+\varphi(a-x)$ одинаковые и равны

$\varphi(R)+\varphi(a-R)=\left(\sqrt{2R}-\sqrt{R}\right)^4+\left(\sqrt{a}-\sqrt{R}\right)^4=\dfrac{b^2}{4}\left(\sqrt{2}-1\right)^4+\dfrac{1}{4}\left(\sqrt{2a}-\sqrt{b}\right)^4$. Это значение наибольшее для ρ^2+r^2 при $b\le a\le 2b$. При этих же условиях, минимальное значение ρ^2+r^2 достигается при $x=a/2$ и оно равно $2\varphi\left(\dfrac{a}{2}\right)=\dfrac{\left(\sqrt{a+b}-\sqrt{b}\right)^4}{2}$. Тогда наибольшее значение суммы площадей кругов

$$S_{\max}=\pi\left(R^2+\rho^2+r^2\right)_{\max}=\frac{\pi}{4}\left(6(3-2\sqrt{2})b^2+(\sqrt{2a}-\sqrt{b})^4\right) \quad (*),$$

а минимальное

$$S_{\min} = \pi\left(R^2+\rho^2+r^2\right) = \pi\left(\frac{b^2}{4}+\frac{\left(\sqrt{a+b}-\sqrt{b}\right)^4}{2}\right) \ (**)$$

2.2. Заключительный тур олимпиады «Росатом», 11 класс, комплект 2

Ответы и решения

1. Ответ: $n = 2,3,\dots,9$

Решение.

Замена $t = 2^{\log_{a_n} 5}$. Квадратное неравенство $t^2 - t - 2 \ge 0$ имеет решение $t \in (-\infty;-1] \cup [2;+\infty)$.

Тогда, с учетом условия $t > 0$, имеем $t \ge 2$ или $\log_{a_n} 5 \ge 1 = \log_{a_n} a_n \to \left[\begin{array}{l} \begin{cases} a_n > 1 \\ a_n \le 5 \end{cases} (A) \\ \begin{cases} 0 < a_n < 1 \\ a_n \ge 5 \end{cases} (B) \end{array}\right.$.

Решение неравенства (А): $1 < \dfrac{n+1}{2} \le 5 \to n = 2,3,\dots,9$

Множество решений неравенства (В) пустое.

2. Ответ: 1) $\begin{cases} x=\dfrac{\pi}{4}+2\pi k \\ y=(-1)^n\dfrac{\pi}{4}+\pi n \end{cases}, k,n\in Z$ 2) $\begin{cases} x=-\dfrac{3\pi}{4}+2\pi k \\ y=(-1)^{n+1}\dfrac{\pi}{4}+\pi n \end{cases}, k,n\in Z$

Решение.

Числа x и y должны удовлетворять системе $\begin{cases} \sin x\cdot\cos x=\sin^2 y \\ \sin x+\cos x=2\sin y \end{cases}$. Возводя левую и правую части второго уравнения в квадрат и вычитая удвоенное первое, получим

$1=2\sin^2 y$. Тогда первое уравнение примет вид $\sin 2x=1$ и имеет решения $x=\dfrac{\pi}{4}+\pi m, m\in Z$.

Если $\sin y=\dfrac{\sqrt{2}}{2}$, то $\sin x>0$ и $\cos x>0$, поэтому $m=2k$ четное, т.е. $\begin{cases} x=\dfrac{\pi}{4}+2\pi k \\ y=(-1)^n\dfrac{\pi}{4}+\pi n \end{cases}, k,n\in Z$ - первая серия решений.

Если $\sin y=-\dfrac{\sqrt{2}}{2}$, то $\sin x<0$ и $\cos x<0$, поэтому $x=-\dfrac{3\pi}{4}+2\pi k, k\in Z$ и $\begin{cases} x=-\dfrac{3\pi}{4}+2\pi k \\ y=(-1)^{n+1}\dfrac{\pi}{4}+\pi n \end{cases}, k,n\in Z$ - вторая серия решения задачи.

3. Ответ: 1) $k_n=2^n+1$ 2) $S_n=\dfrac{a+b}{2}\left(2^n+1\right)$ 3) $a_{n,m}=a+\dfrac{b-a}{2^n}(m-1)$

Решение.

Число чисел на первом шаге равно $3=2^1+1$, на втором $5=2^2+1$. Сделаем индуктивное предположение о том, что количество чисел в строке на $(m-1)-$ом шаге равно $k_{n-1}=2^{n-1}+1$.

Тогда на $n-$ом шаге к ним добавится 2^{n-1} средних арифметических, поэтому $k_n=k_{n-1}+2^{n-1}=2\cdot 2^{n-1}+1=2^n+1$. Разность между любыми соседними числами на любом шаге постоянная, поэтому числа, записанные Петей в строку на $n-$ом шаге, образуют арифметическую прогрессию. Ее разность на $n-$ом шаге равна $d_n=\dfrac{b-a}{2^n}$, а сумма всех чисел $S_n=\dfrac{a+b}{2}\left(2^n+1\right)$.

Наконец, число $a_{n,m}=a+d_n\cdot(m-1)=a+\dfrac{b-a}{2^n}(m-1)$.

Для данных варианта 1 Ответ: 1) $k_n=2^n+1=2^{15}+1$ 2) $S_n=\dfrac{a+b}{2}\left(2^n+1\right)=11\cdot(2^{15}+1)$

3) $a_{n,m}=a+\dfrac{b-a}{2^n}(m-1)=5+\dfrac{144}{2^{15}}$

4. Ответ: $p=\dfrac{1}{70}$

Решение.

Событие $H-$ четыре, окрашенных в желтый цвет вершины, оказались в одной грани. Общее число способов окрашивания вершин $n=C_8^4=\dfrac{8\cdot7\cdot6\cdot5}{1\cdot2\cdot3\cdot4}=70$. Число способов окрашивания, благоприятствующих событию H, равно числу граней куба, т.е. $m=6$. Тогда вероятность события H равна $P(H)=\dfrac{m}{n}=\dfrac{3}{35}$. Событие $A-$ четыре желтых вершины на плоскости стола – есть произведение события H и события $B-$ попадания на плоскость стола той грани, все вершины которой окрашены в желтый цвет. Условная вероятность $P(B/H)=1/6$.

По теореме о вероятности произведения событий $P(A)=P(B\cdot H)=P(H)\cdot P(B/H)=\frac{3}{35}\cdot\frac{1}{6}=\frac{1}{70}$.

5.

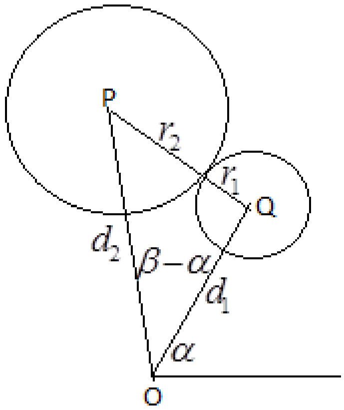


Рис..1

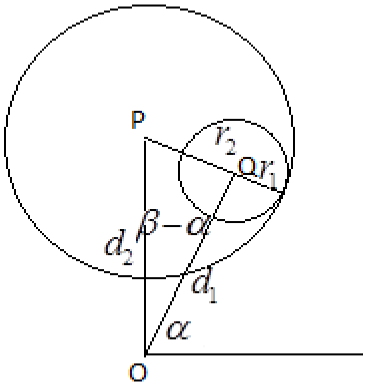


Рис. 2

Единственность решения = касание окружностей.

Условие касания: $PQ=r_1+r_2$ (внешнее касание, рис.1) или

$PQ=\left|r_1-r_2\right|$ (внутреннее касание, рис.2).

Теорема косинусов для $\triangle PQO$:

Для внешнего касания:

$$\left(r_1+r_2\right)^2=d_1^2+d_2^2-2d_1d_2\cos\left(\beta-\alpha\right)\to\cos\left(\beta-\alpha\right)=\frac{d_1^2+d_2^2-\left(r_1+r_2\right)^2}{2d_1d_2}$$

Для внутреннего касания:

$$\left(r_1-r_2\right)^2=d_1^2+d_2^2-2d_1d_2\cos\left(\beta-\alpha\right)\to\cos\left(\beta-\alpha\right)=\frac{d_1^2+d_2^2-\left(r_1-r_2\right)^2}{2d_1d_2}.$$

Ответ: 1) $a_1=\pm\arccos\frac{2}{3}+2\pi k,\ k\in Z$ 2) $a_2=2\pi k, k\in Z$

Решение.

Расстояние от центра первой окружности до начала координат $d_1=3$, $r_1=1$

Расстояние от центра второй окружности до начала координат $d_2=4$, $r_2=2$

Внешнее касание: $\cos a=\frac{9+16-9}{24}=\frac{2}{3}\to a_1=\pm\arccos\frac{2}{3}+2\pi k,\ k\in Z$

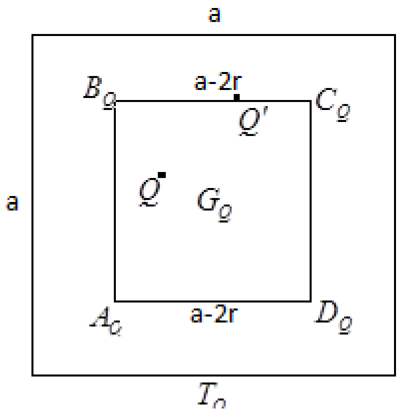
Внутреннее касание: $\cos a=\frac{25-1}{24}=1\to a_2=2\pi k, k\in Z$

6. Ответ: $V_{\max}=\frac{1}{6}\left(a^2+(a-2r)^2\right)(a-2r)$

Решение.

1. Вершины M, N, P и Q пирамиды, имеющей максимальный объем, являются центрами окружностей, касающихся ребер боковых граней.

Действительно, если плоскость боковой грани куба, которой принадлежит точка Q, не параллельна плоскости, проходящей через точки M, N, P, то перемещением точки Q в точку Q', лежащую на той же грани на расстоянии r от ребра куба, можно увеличить объем пирамиды $MNPQ$. То же справедливо для любой из точек M, N, P. Если плоскость боковой грани, в которой лежит точка Q, параллельна плоскости MNP, то перемещение точки Q в точку Q' оставит объем пирамиды прежним. На рис. изображена грань T_Q куба и квадрат G_Q, стороны которого находятся на расстоянии r от сторон (ребер куба) квадрата T_Q.



Таким, образом, вершина Q пирамиды $MNPQ$, имеющей максимально возможный объем, должна лежать на сторонах квадрата $A_QB_QC_QD_Q$ со стороной $a-2r$. Аналогичные утверждения относятся ко всем другим точкам M, N, P.

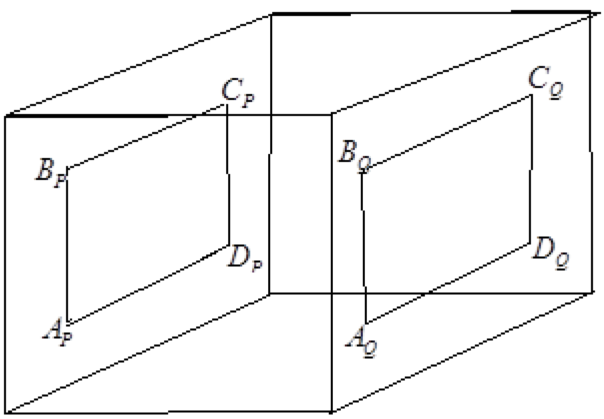
2. Вершина Q пирамиды $MNPQ$, имеющей максимальный объем, совпадает с одной из вершин квадрата $A_QB_QC_QD_Q$.

Действительно, если сторона квадрата G_Q, содержащая точку Q, например, B_QC_Q не параллельна плоскости MNP, то перемещением точки Q в одну из вершин B_Q или C_Q можно увеличить объем пирамиды $MNPQ$. Если сторона B_QC_Q параллельна плоскости MNP, то перемещение точки Q в любую из вершин B_Q или C_Q не изменит объем пирамиды $MNPQ$.

Таким образом, точка Q для пирамиды $MNPQ$, имеющей максимальный объем, совпадает с одной из вершин квадрата G_Q. Аналогичное утверждение справедливо для любой вершины пирамиды $MNPQ$.

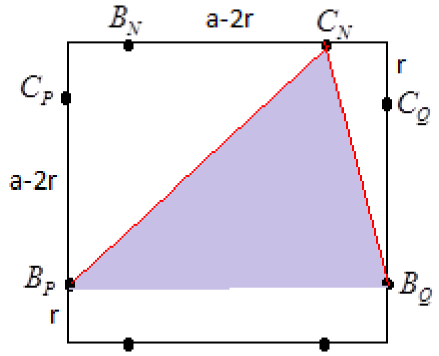
3. Вычисление объема.

Пусть точки P и Q лежат на параллельных боковых гранях.



Вершины пирамиды $MNPQ$ лежат на двух параллельных плоскостях $B_PB_QC_Q$ и $A_PA_QD_Q$.

Случай 1. Три вершины P, Q, N лежат в плоскости $B_PB_QC_Q$ (или $A_PA_QD_Q$)



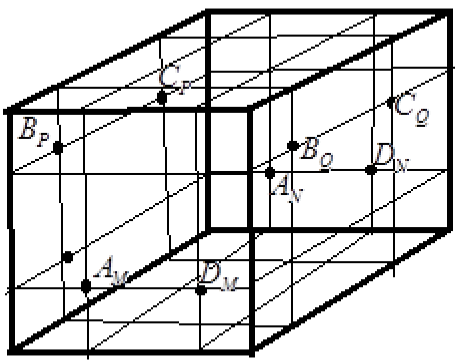
На рис. изображено сечение плоскостью $B_PB_QC_Q$ и треугольник PQN наибольшей площади, среди треугольников с вершинами в точках $B_P, C_P, B_N, C_N, C_Q, B_Q$.

Его площадь равна $S_1 = \dfrac{a(a-r)}{2}$. Высота пирамиды $MNPQ$, опущенная из вершины M равна $h_1 = a - 2r$ и максимальный объем равен $V_1 = \dfrac{a(a-r)(a-2r)}{6}$.

Случай 2.

Две вершины P, Q лежит в плоскости $B_PB_QC_Q$, а другие две M, N - в плоскости $A_PA_QD_Q$, т.е. точка P выбирается среди точек B_P, C_P, точка Q – из B_Q, C_Q, точка M – из A_M, D_M и, наконец, точка N – из A_N, D_N. Не надо думать, что это дает 16 вариантов различных значений объемов. Фиксация точки P в точке B_P уже сокращает число вариантов вдвое. Какие среди них различные?

B_P C_P B_Q C_Q A_M D_M A_N D_N



А. Точка Q совпадает с B_Q. Тогда, поскольку B_PB_Q параллельна A_MD_M и A_ND_N, все допустимые пирамиды имеют одинаковый объем, равный объему пирамиды $B_PB_QA_MA_N$. Ребра B_PB_Q и A_MA_N перпендикулярны и поэтому объем такой пирамиды равен $V_{2,A} = \dfrac{1}{6}\cdot|B_PB_Q|\cdot|A_MA_N|\cdot d$, где d – расстояние между скрещивающимися прямыми, на которых лежат эти ребра $|B_PB_Q| = |A_MA_N| = a,\quad d = a - 2r$. Тогда $V_{2,\mathrm{A}} = \dfrac{a^2(a-2r)}{6} > V_1$.

Б. Точка Q совпадает с точкой C_Q. Если точка M совпадает с точкой A_M, а точка N – с точкой A_N, то пирамида $B_PA_MA_NC_Q$ равновелика пирамиде $B_PA_MA_NB_Q$ и имеет объем $V_{2,\mathrm{B}} = \dfrac{1}{6}|B_PB_Q|\cdot|A_MA_N|\cdot d = \dfrac{a^2(a-2r)}{6} = V_{2,A}$. Если точка M совпадает с точкой A_M, а точка N – с точкой D_N, то пирамиды $B_PC_QA_MD_N$ нет, поскольку ребра B_PC_Q и A_MD_N параллельны.

Если точка M совпадает с точкой D_M, а точка N – с точкой D_N, то этот вариант дает объем пирамиды $B_PC_QD_MD_N$ такой же, что и для пирамиды $B_PA_MA_NC_Q$ т.е. $V_{2,A}$. Наконец, если точка M

совпадает с точкой D_M, а точка $N-$ с точкой A_N, то ребра B_PC_Q и D_MA_N перпендикулярны и расстояние между ними $d=a-2r$, а их длины равны $\sqrt{a^2+\left(a-2r\right)^2}$. Тогда объем пирамиды $B_PC_QD_MA_N$ равен $V_{2,C}=\frac{1}{6}\left(a^2+(a-2r)^2\right)(a-2r)=V_{2,A}+\frac{1}{6}\left(a-2r\right)^3>V_{2,A}>V_1$.

Таким образом, наибольший объем имеет пирамида $B_PC_QD_MA_N$ и он равен $V_{\max}=V_{2,c}=\frac{1}{6}\left(a^2+(a-2r)^2\right)(a-2r)$.

Для варианта 1 Ответ $V_{\max}=\frac{20}{3}$.

2.3. Заключительный тур олимпиады «Росатом», 11 класс, комплект 3

Ответы и решения

1. Ответ: 1) $a=-16$, $x=1$ 2) $a=11$, $x=-2$

Решение.

Приравниваем производные в точке касания $y'=3x^2+12x+a=-1$. Приравниваем ординаты точки касания $3-x=x^3+6x^2+ax+11$.

Преобразование системы: $\begin{cases} a=-3x^2-12x-1 \\ a+1=\dfrac{-x^3-6x^2-8}{x} \end{cases} \to \dfrac{-x^3-6x^2-8}{x}=-3x^2-12x \to 2x^3+6x^2-8=0$.

Уравнение имеет корни $x_1=1,\ x_{2,3}=-2$. Первому корню соответствует $a=-16$, второму - $a=11$.

2. Ответ: 1) $n=24t-9,\ t\in Z$ 2) $n=8t+1,\ t\in Z$

Решение. Подставляем $x=\pi/4$ в уравнение:

$$\cos\left(\frac{\pi n}{12}\right)=\sin\left(\frac{\pi}{4}+\frac{\pi n}{3}\right)=\cos\left(\frac{\pi}{4}-\frac{\pi n}{3}\right)\to\left[\begin{aligned}&\frac{\pi n}{12}=\frac{\pi}{4}-\frac{\pi n}{3}+2\pi k,\\&\frac{\pi n}{12}=-\frac{\pi}{4}+\frac{\pi n}{3}+2\pi k\end{aligned}\right.$$

$$\left[\begin{aligned}5n&=24k+3\\ n&=1-8k\end{aligned}\right.,\ k\in Z$$

В первой серии $8k+1=5m\to\begin{cases}k=-2+5t\\ m=3+8t\end{cases},t\in Z$, т.е. $n=24t-9$. Вторая серия $n=1-8k,\ k\in Z$ с первой не имеет пересечений, поскольку уравнение $1-8k=24t-9\to12t+4k=5$ в целых числах решений не имеет.

3. Ответ: $x=e$

Решение.

Первообразная функции $f(t)=\dfrac{2\ln t+1}{t}$ равна $F(t)=\ln^2 t+\ln t+c$. Тогда

$$2\int_1^x\frac{2\ln t+1}{t}dt=2\left(\ln^2 t+\ln t\right)\Big|_1^x=2\left(\ln^2 x+\ln x\right),\qquad \int_x^{e^2}\frac{2\ln t+1}{t}dt=\left(\ln^2 t+\ln t\right)\Big|_x^{e^2}=\left(6-\ln^2 x-\ln x\right).$$

Преобразованное уравнение

$$2\left(\ln^2 x+\ln x\right)=6-\ln^2 x-\ln x\to\ln^2 x+\ln x-2=0\to\left[\begin{aligned}\ln x&=1\\ \ln x&=-2\end{aligned}\right.\to\left[\begin{aligned}&x=e\\ &x=1/e^2\notin\left[1;e^2\right]\end{aligned}\right..$$

4. Ответ: 1) первая пуговица должна касаться борта коробки;

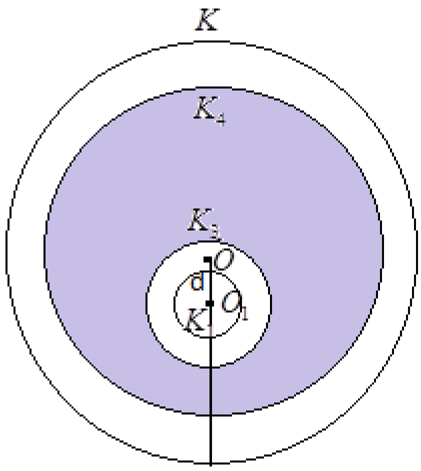
2) $P_{\max}(A)=1-\dfrac{1}{\pi}\left(\arccos\dfrac{31}{32}+\dfrac{1}{16}\arccos\dfrac{1}{8}-\dfrac{3\sqrt{7}}{32}\right)\approx 0,97$.

Решение.

d - расстояние центра первой пуговицы K_1 до центра O дна K коробки, $0\le d\le 8$,

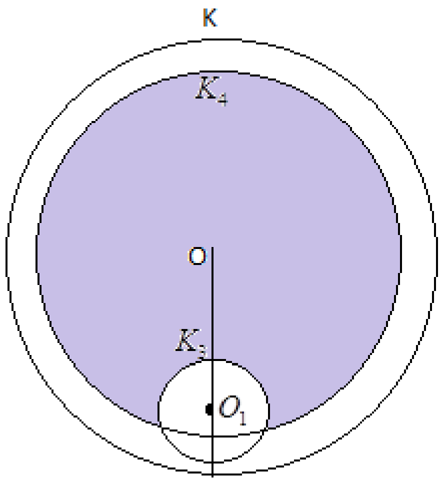
точка O_1 - ее центр, вторая пуговица K_2 имеет центр в точке O_2.

Если $0\le d\le 6$, то круг K_3 с центром в O_1 радиуса 2 принадлежит кругу K_4 с центром в точке O и радиуса 8. (см. рис.)

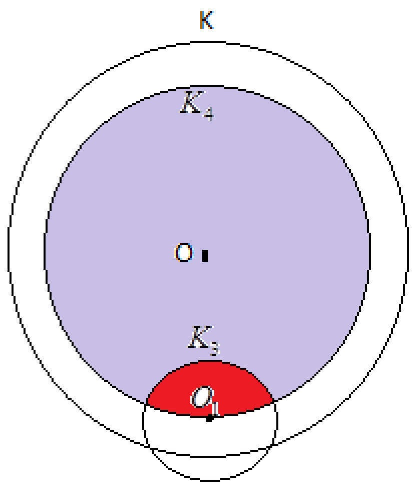


Любой круг K_2, центр которого O_2 находится в выделенной цветом области благоприятен для выигрыша первого игрока. Вероятность выигрыша в этом диапазоне изменения d не зависит от d и равна отношению площади выделенной области к площади круга K_4, т.е. $P(A)=\dfrac{\pi(64-4)}{64\pi}=\dfrac{15}{16}\approx 0,94$.

При $6<d\leq 8$ круг K_3 выходит за пределы круга K_4 и площадь выделенной области, соответствующей благоприятному для первого игрока расположению центров кругов K_2, увеличивается. (см. рис)

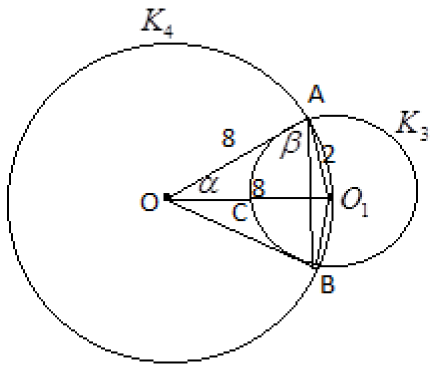


Максимальное значение этой площади достигается при $d=8$ и соответствует расположению точки O_1 на границе круга K_4.



Вычисление площади красной области.

Площадь красной области равна сумме площадей двух сегментов кругов K_3 и K_4.



Треугольник AOO_1 равнобедренный со сторонами 8 и 2. Тогда $\cos\beta = \frac{1}{8}$, $\alpha = \pi - 2\beta$.

$\sin\alpha = \sin(\pi - 2\beta) = \sin 2\beta = 2\sin\beta \cdot \cos\beta = 2 \cdot \frac{1}{8}\sqrt{1 - \frac{1}{64}} = \frac{3\sqrt{7}}{32}$,

$\cos\alpha = \frac{31}{32} \to \alpha = \arccos\frac{31}{32}$, $\beta = \arccos\frac{1}{8}$

Площадь сегмента круга K_4 с центральным углом 2α равна:

$$S_1 = 64\alpha - 0{,}5 \cdot 64 \cdot \sin 2\alpha = 64 \cdot (\alpha - \sin\alpha\cos\alpha) = 64\left(\arccos\frac{31}{32} - \frac{93\sqrt{7}}{32^2}\right) = .$$

$$= 64\arccos\frac{31}{32} - \frac{93\sqrt{7}}{16} \approx 0{,}66$$

Аналогично, площадь сегмента круга K_3 с углом 2β равна:

$$S_2 == 4 \cdot (\beta - \sin\beta\cos\beta) = 4\left(\arccos\frac{1}{8} - \frac{3\sqrt{7}}{64}\right) = 4\arccos\frac{1}{8} - \frac{3\sqrt{7}}{16} \approx 5{,}28 .$$

Площадь «красной» области $S = S_1 + S_2 = 64\arccos\frac{31}{32} + 4\arccos\frac{1}{8} - 6\sqrt{7} \approx 5{,}95$

Тогда максимальное значение вероятности выигрыша первого игрока равно

$$P_{\max}(A) = 1 - \frac{S}{64\pi} = 1 - \frac{1}{\pi}\left(\arccos\frac{31}{32} + \frac{1}{16}\arccos\frac{1}{8} - \frac{3\sqrt{7}}{32}\right) \approx 0{,}97$$

В общем случае, если радиус коробки R, радиус пуговицы r, то

$$\sin\alpha = \frac{2r\sqrt{(R-r)R}}{(R-r)^2},\ \cos\alpha = \frac{R^2 - 2Rr - r^2}{(R-r)^2},\ \sin\beta = \frac{\sqrt{(R-2r)R}}{(R-r)},\ \cos\beta = \frac{r}{R-r},$$

$$S = (R-r)^2 \cdot \alpha + 4r^2 \cdot \beta - (R-r)^2 \cdot \sin\alpha,$$

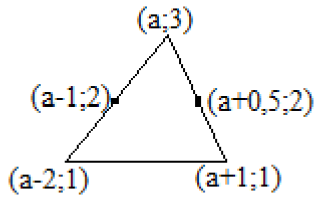
$$P_{\max}(A) = 1 - \frac{1}{\pi}\left(\alpha + 4\beta \cdot \cos^2\beta - \sin\alpha\right),\quad P_{\min}(A) = 1 - \frac{4r^2}{(R-r)^2} = \frac{(R-3r)(R+r)}{(R-r)^2},$$

$$P_{\min}(\bar{A}) = 1 - P_{\max}(A) = \frac{1}{\pi}\left(\alpha + 4\beta \cdot \cos^2\beta - \sin\alpha\right),\ P_{\max}(\bar{A}) = \frac{4r^2}{(R-r)^2}$$

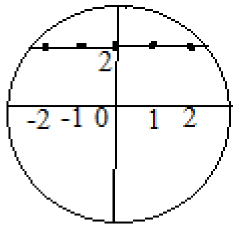
Задача 5 Ответ: $a \in (-2{,}5; -1{,}5] \cup [-1; -0{,}5] \cup [0; 0{,}5] \cup [1; 1{,}5] \cup [2; 3)$

Решение. Первые три неравенства ограничивают на плоскости треугольник с вершинами $A(a-2;1), B(a;3), C(a+1;1)$ (надо попарно решать системы для уравнений границ)

При изменении параметра a треугольник ABC перемещается параллельно оси OX, так что его основание лежит на прямой $y = 1$.



Все целые решения системы находятся внутри окружности, на средней линии треугольника ABC с уравнением $y = 2$. Таких точек в окружности



всего 5. Их абсциссы равны $-2, -1, 0, 1, 2$. Выясним при каких a единственным решением системы будет точка с абсциссой

1) $x_1 = -2$ $\quad \begin{cases} a-1 < -2 < a+0,5 \\ -1 \ge a+0,5 \end{cases} \to a \in (-2,5; -1,5]$

2) $x_2 = -1$ $\quad \begin{cases} a-1 < -1 < a+0,5 \\ -2 \le a-1 \\ 0 \ge a+0,5 \end{cases} \to a \in [-1; -0,5]$

3) $x_3 = 0$ $\quad \begin{cases} a-1 < 0 < a+0,5 \\ -1 \le a-1 \\ 1 \ge a+0,5 \end{cases} \to a \in [0; 0,5]$

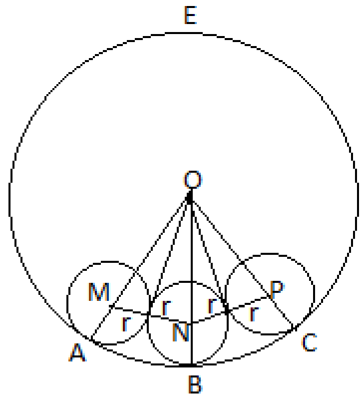
4) $x_4 = 1$ $\quad \begin{cases} a-1 < 1 < a+0,5 \\ 0 \le a-1 \\ 2 \ge a+0,5 \end{cases} \to a \in [1; 1,5]$

5) $x_2 = 2$ $\quad \begin{cases} a-1 < 2 < a+0,5 \\ 1 \le a-1 \end{cases} \to a \in [2; 3)$

Объединение полученных множеств составляет ответ.

6. Ответ: $2\pi r - 4\varphi R$, где $\varphi -$ острый угол, $\sin\varphi = \dfrac{r}{R-r}$

Решение.



Положение колеса A - встреча с препятствием B, положение C - конец преодоления препятствия, $\measuredangle AOC = 4\varphi$, где $\sin\varphi = \dfrac{r}{R-r}$. Путь, пройденный центром колеса во время преодоления препятствия, равен длине дуги окружности радиуса $2r$ с углом $\pi - 2\varphi$, т.е. $S_1 = 2(\pi - 2\varphi)r$. Путь, пройденный колесом вне препятствия, равен длине дуги радиуса $R-r$ с углом $(2\pi - 4\varphi)$, т.е. $S_2 = (2\pi - 4\varphi)(R-r)$. Тогда путь, пройденный центром колеса с препятствием $S_3 = S_1 + S_2 = 2(\pi - 2\varphi)r + (2\pi - 4\varphi)(R-r) = (2\pi - 4\varphi)R$, т.е. S_3 равен длине дуги AEC обода.

Длина пути центра колеса при отсутствии препятствия равна $S_4 = 2\pi(R-r)$.

Тогда $S_3 - S_4 = (2\pi - 4\varphi)R - 2\pi(R-r) = 2\pi r - 4\varphi R$.

Если $R = 3, r = 1$, то $\sin\varphi = \dfrac{r}{R-r} = \dfrac{1}{2} \to \varphi = \dfrac{\pi}{6}$. Тогда $S_3 - S_4 = 2\pi r - 4\varphi R = 2\pi - \dfrac{12\pi}{6} = 0$, т.е. длина пути не изменится при отсутствии препятствия.

2.4. Заключительный тур олимпиады «Росатом», 11 класс, комплект 4

Ответы и решения

Задача 1 Ответ: $x = 2$

Решение.

Преобразование уравнения $f\left(\log_2(x(x^2-1)) - 0,5\log_2(x-1)^2\right) = f(\log_2 6)$. Из монотонности функции f следует, что равенство возможно, если $\log_2(x(x^2-1)) - 0,5\log_2(x-1)^2 = \log_2 6$ (*)

Область допустимых значений $x(x-1)(x+1) > 0 \to x \in (-1;0) \cup (1;+\infty)$.

Преобразование уравнения:

1) В области $x\in(-1;0)$: $\log_2\frac{x(x-1)(x+1)}{1-x}=\log_2 6\to x^2+x+6=0$ - решений нет.

2) В области $x\in(1;+\infty)$: $\log_2\frac{x(x-1)(x+1)}{x-1}=\log_2 6\to x^2+x-6=0\to x=2$.

2. Ответ: $a\in(-\infty;-2)\cup(2;+\infty)$

Решение.

Подставим x и y в уравнение прямой: $2a\cos t+3\sin t=5$. Мышь пересекает канавку, если полученное тригонометрическое уравнение имеет решение. Воспользуемся формулой вспомогательного аргумента: $\sqrt{4a^2+9}\cdot\sin(t+\varphi)=5$, где $\sin\varphi=\frac{2a}{\sqrt{4a^2+9}}$, $\cos\varphi=\frac{3}{\sqrt{4a^2+9}}$.

Уравнение имеет решение, если $\sqrt{4a^2+9}>5\to 4a^2>16\to|a|>2$.

3. Ответ: 1) $c_5=2\cdot 9^{99}$ 2) $q=9^{21}$

Решение.

Элементами множества $A\cap B$ является члены последовательностей, для которых $a_n=b_m$. найдем все такие пары n и m: $\to 2\cdot 9^{3(n-1)}=18\cdot 3^{7(m-1)}\to 9^{3n-4}=3^{7(m-1)}\to 6n-8=7(m-1)\to 6n-7m=1$.

Общим решением этого уравнения являются : $\begin{cases} n=7k-1 \\ m=6k-1\end{cases}$, $k\in Z, k\ge 1$. Тогда последовательность

$c_k=a_{7k-1}=2\cdot 9^{3(7k-2)}=2\cdot 9^{21k-6}=2\cdot 9^{21(k-1)+15}=2\cdot 9^{15}\cdot 9^{21(k-1)},\ k\ge 1$.

Поэтому c_k- геометрическая прогрессия с первым членом $c_1=2\cdot 9^{15}$ и знаменателем $q=9^{21}$.

Тогда $c_5=c_1\cdot q^4=2\cdot 9^{15}\cdot 9^{84}=2\cdot 9^{99}$.

4. Ответ: $P(G)=0{,}117376$

Решение.

Событие G - в серии допущен только один промах. $P(G)=?$

Событие A - Вася промахнулся из рогатки один раз. $P(A)=2\cdot 0{,}2\cdot 0{,}8=0{,}32$.

Событие B - Вася промахнулся из пистолета один раз. $P(\mathrm{B})=2\cdot 0{,}7\cdot 0{,}3=0{,}42$

Событие C - Вася промахнулся из ружья один раз. $P(\mathrm{C})=2\cdot 0{,}8\cdot 0{,}2=0{,}32$

Событие $G_A=A\cap G-$ - Вася промахнулся из рогатки один раз, а остальное - все попал.

$P(\mathrm{G}_A)=0{,}32\cdot 0{,}7^2\cdot 0{,}8^2$

Событие $G_B=B\cap G-$ - Вася промахнулся из пистолета один раз, а остальное - все попал.

$P(\mathrm{G}_B)=0{,}42\cdot 0{,}2^2\cdot 0{,}8^2$

Событие $G_C=C\cap G-$ - Вася промахнулся из ружья один раз, а остальное - все попал.

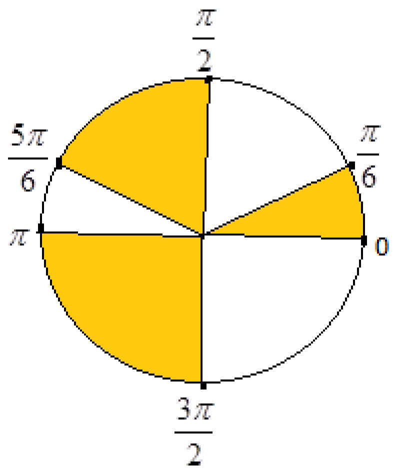
$P(\mathrm{G}_C)=0{,}32\cdot 0{,}2^2\cdot 0{,}7^2$

События G_A, G_B, G_C несовместны, при этом $G=G_A+G_B+G_C$. Тогда

$P(G)=P(G_A)+P(G_B)+P(G_C)=0{,}117376$ (точное значение, считается без калькулятора)

5. Ответ: $a\in\left[0;\frac{\pi}{6}\right]$

Решение. На тригонометрическом круге отметим решение неравенства:



Условие существования отрезка: $\frac{3\pi}{2}-a>\frac{4\pi}{3}-2a \to a>-\frac{\pi}{6}$.

Случай 1. $x\in\left[2\pi k;\frac{\pi}{6}+2\pi k\right], k\in Z$

Включение отрезка в эту зону выражается неравенством:

$$2\pi k\le\frac{4\pi}{3}-2a<\frac{3\pi}{2}-a\le\frac{\pi}{6}+2\pi k \to \begin{cases} a\le\frac{2\pi}{3}-\pi k \\ a\ge\frac{4\pi}{3}-2\pi k \\ a>-\frac{\pi}{6} \end{cases} \to \begin{cases} \frac{2\pi}{3}-\pi k\ge\frac{4\pi}{3}-2\pi k \\ \frac{2\pi}{3}-\pi k>-\frac{\pi}{6} \end{cases}$$

$$\to \begin{cases} k\ge\frac{2}{3} \\ k<\frac{5}{6} \end{cases}$$

Система неравенств не имеет решений ни при каких целых k .

Случай 2. $x\in\left[\frac{\pi}{2}+2\pi k;\frac{5\pi}{6}+2\pi k\right], k\in Z$

Включение отрезка в эту зону выражается неравенством:

$$\frac{\pi}{2}+2\pi k\le\frac{4\pi}{3}-2a<\frac{3\pi}{2}-a\le\frac{5\pi}{6}+2\pi k \to \begin{cases} a\le\frac{5\pi}{12}-\pi k \\ a\ge\frac{2\pi}{3}-2\pi k \\ a>-\frac{\pi}{6} \end{cases} \to \begin{cases} \frac{5\pi}{12}-\pi k>\frac{2\pi}{3}-2\pi k \\ \frac{5\pi}{12}-\pi k>-\frac{\pi}{6} \end{cases} \to$$

$$\to \begin{cases} k>\frac{1}{4} \\ k<\frac{7}{12} \end{cases}$$

Система неравенств не имеет решений ни при каких целых k .

Случай 3. $x\in\left[\pi+2\pi k;\frac{3\pi}{2}+2\pi k\right], k\in Z$

$$\pi + 2\pi k \le \frac{4\pi}{3} - 2a < \frac{3\pi}{2} - a \le \frac{3\pi}{2} + 2\pi k \to \begin{cases} a \le \frac{\pi}{6} - \pi k \\ a \ge -2\pi k \\ a > -\frac{\pi}{6} \end{cases} \to \begin{cases} \frac{\pi}{6} - \pi k > -2\pi k \\ \frac{\pi}{6} - \pi k > -\frac{\pi}{6} \end{cases} \to$$

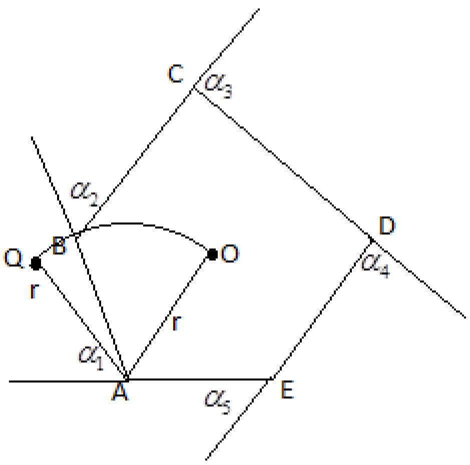
$$\to \begin{cases} k > -\frac{1}{6} \\ k < \frac{1}{3} \end{cases}$$

Единственным решением является $k = 0$, т.е. $a \in \left[0; \frac{\pi}{6}\right]$.

6. Ответ: $\pi : 3$

Решение.

Для произвольного многоугольника, вписанного в окружность радиуса r с центром в точке O , справедливо равенство $S = 2\pi r$, где $S -$ путь, пройденный центром O при вращении колеса на один оборот. Действительно, пусть $\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_n$ внешние углы многоугольника при вершинах $A, B, ..., E$. Как известно, их сумма $\alpha_1 + \alpha_2 + ... + \alpha_n = 2\pi$. На рис. изображен в виде дуги OQ окружности с центром в точке A радиуса r путь, пройденный центром колеса при его повороте вокруг вершины A на угол α_1 . Его длина $S_1 = \alpha_1 \cdot r$. При следующем шаге происходит поворот колеса вокруг вершины B, при этом его центр совершит путь $S_2 = \alpha_2 \cdot r$ и т.д. На последнем шаге, когда колесо примет первоначальное положение (полный оборот), центр колеса пройдет путь $S_n = \alpha_n \cdot r$. Суммируя пути ,пройденные на каждом этапе, получим общий путь центра колеса при одном его обороте $S = S_1 + S_2 + ... + S_n = r \cdot (\alpha_1 + \alpha_2 + ... + \alpha_n) = 2\pi r$



Для любого правильного n - угольника его периметр равен $p = 2n \cdot r \sin\frac{\pi}{n}$. Тогда отношение

$$S : p = \frac{\pi}{n\sin(\pi / n)}$$

В варианте 1 $n = 6$ отношение $S : p = \frac{\pi}{6\sin(\pi / 6)} = \pi : 3$.

2.21. Критерии определения победителей и призеров Отраслевой физико-математической олимпиады «Росатом» 2015-2016 учебного года, Математика

Оргкомитет Отраслевой физико-математической олимпиады школьников «Росатом» установил следующие принципы оценивания работ заключительного тура и определения победителей и призеров олимпиады 2015-2016 учебного года.

1. Максимальная оценка за каждую задачу – 2 балла независимо от уровня сложности задачи.
2. Каждая задача в зависимости от полноты решения оценивалась оценкой: 0 баллов, 0,5 балла, 1 балл, 1,5 балла или 2 балла.
3. Оценка олимпиадной работы равна сумме оценок за все задачи.
4. Если сумма оценок за задачи оказывается «полуцелой» (5.5, 6.5 и т.д.), оценка округляется до целого значения с избытком или недостатком по усмотрению проверяющего работу члена жюри.
5. Победителями и призерами олимпиады считаются участники заключительного тура, получившие следующие оценки

Класс	Оценки победителей и призеров		
	Победитель	Призер 2 степени	Призер 3 степени
7	10-9	8	7
8	10	9	нет
9	10	9	8
10	10	9	нет
11	10-12	9	8