2.2. Отборочный тур олимпиады «Росатом», 11 класс

1. Найти без помощи производных множество значений функции $f(x)=\dfrac{7x^2+22x+16}{x^2+2x+2}$.

2. Найти значение $\cos 2x$, если x – решение уравнения $\sin\left(x+3arctg\sqrt[6]{2}\right)=3\sin\left(arctg\sqrt[6]{2}-x\right)$.

3. Найти все натуральные x, при которых выражение $(x-2)^{x+1}-(x+2)^{x}$ делится на 3 без остатка.

4. Арифметическая прогрессия $\{a_n\}$ обладает тем свойством, что квадрат каждого ее члена является некоторым членом той же прогрессии. Найти разность прогрессии, если ее первый член $a_1=3$.

5. Найти значения параметра a, при котором система неравенств $\begin{cases}|x-3a+3|+|y-2a|\le 2\\ |x|+|y|\le 6\end{cases}$ имеет наибольшее возможное число целочисленных решений $(x;y)$.

6. Ребра AB и CD треугольной пирамиды $ABCD$ взаимно перпендикулярны и по длине равны 4. Длины ребер BC и BD равны 3 и 2, а длины ребер AC и AD равны $2\sqrt{3}$ и $\sqrt{17}$ соответственно. Найти объем пирамиды.

2.3. Очный отборочный тур олимпиады «Росатом», 11 класс

1. Найти целые решения уравнения $x^2 + xy^2 - 10y^2 = 0$.

2. Числа $(x; y)$ являются решениями уравнения

$$2\sin x - 2\sin y = \sin\frac{x+y}{2} + \sin\frac{x-3y}{2} .$$

Найти наибольшее возможное значение выражения $\sin^2\frac{x+y}{2} + \cos y$.

3. Натуральное число a такое, что сумма его цифр и сумма цифр числа $a+1$ делятся на 77 без остатка. Среди таких чисел найти 1) все числа с минимально возможной суммой цифр; 2) минимально возможное a .

4. Найти целые решения уравнения $2(x-2) + 2\sqrt{x^2 - 3x + 5} = (x-2)(x+1)$.

5. При каких значениях a система $\begin{cases} x^4 = ax^2 + 4y^2 \\ y^4 = 4x^2 + ay^2 \end{cases}$ имеет ровно 5 решений?

6. Прямые l_1, l_2 и l_3 на плоскости параллельны, расстояния между прямыми l_1, l_2 и l_2, l_3 равны 1 и 2 соответственно (прямая l_2 расположена между прямыми l_1 и l_3). Вершины равностороннего треугольника ABC лежат на прямых l_1, l_2 и l_3 . Найти длину стороны треугольника.

2.4. Очный отборочный тур олимпиады «Росатом», 11 класс

1. При каком минимальном a уравнение $x(x+2)(x+6)=\frac{a}{x+8}$ имеет решения?

2. Найти наибольшее значение выражения $2\cos^2 x+3\sin 2x+10\sin^2 x$.

   При каких x оно достигается?

3. Целые, положительные числа $(x;y;z)$ связаны соотношением

$12\left(x^2+y^2\right)=5z\cdot(x+y)$. Найти эти числа, если известно, что они ,

расположенные в порядке x,y,z, являются тремя последовательными членами некоторой геометрической прогрессии.

4. При каких a и b многочлен

$$P(x)=x^5+(a-2)x^4+(b-2a+1)x^3+(a-2b+2)x^2+(b-4)x+2$$

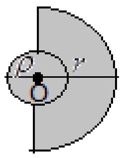
делится на $(x-1)^n$ без остатка в максимально возможной степени n. Найти n.

5. При каких целых a уравнение $(a+1+x)^3-4\left(a^3+1+x^3\right)+12ax=0$ имеет

   только целые решения? Найти эти решения.

6. В точке A сферы с центром в точке O и радиуса 4 находится источник света.

На плоскости, проходящей через точку O и перпендикулярной прямой AO, внутри сферы, расположена мишень, изображенная на рис. Точка O на мишени совпадает с центром сферы, радиусы ρ и r кругов, по которым вырезалась мишень, равны 1 и 3 соответственно. Найти площадь тени от мишени на поверхности сферы.



2.5. Очный отборочный тур олимпиады «Росатом», 11 класс

1. Найти квадратный трехчлен $f(x)$, удовлетворяющий тождеству по x

$f(x+1)-f(x)=x+2$, для которого $f(1)=0$.

2. Найти наибольшее значение $\log_2\left(3\pi^2+2\pi x-x^2\right)$, если x - решение

уравнения $64\sin^5 x+\frac{19}{\sin x}=64\cos^5 x+\frac{19}{\cos x}$.

3. Арифметическая прогрессия a_n с разностью $d=0,5$ такова, что для любого натурального числа n найдется член прогрессии a_m, равный сумме первых n ее членов. Найти a_1.

4. Натуральные числа x и y взаимно простые. Доказать, что

$$НОД\left(x+y,x^2+2y^2\right)\le 3.$$

5. Найти наименьшее возможное значение a, при котором система неравенств

$\begin{cases}-x-a-4\le y\le -x+\sqrt{a}\\ -9\le x\le -4,\ 2\le y\le 7\end{cases}$ имеет максимальное число целых решений $(x;y)$.

6. Точки M и N - середины ребер AD и BC основания правильной четырехугольной пирамиды $SABCD$ со стороной основания 2 и апофемой боковой грани $\sqrt{3}$. На апофеме боковой грани ASD расположена точка P так, что $MP:PS=1:2$. На апофеме боковой грани BSC расположена точка Q так, что $NQ:QS=1:3$. Точки P и Q соединены ломаной, лежащей на поверхности пирамиды. Найти наименьшую возможную длину ломаной.