

2.7. Заключительный тур олимпиады «Росатом», 11 класс (Москва)

1. Найти наибольшее значение выражения $x - 2y$ для $(x; y)$, удовлетворяющих уравнению $4x^2 + 9y^2 = 25$.
2. Найти все решения $(x; y)$ уравнения $(2 \sin(x + y) + 3)(\cos(2x - y) - 1) = -10$, лежащие на прямой $6x + 5y = 15\pi$.
3. Найти зависимость от n числа целых неотрицательных решений уравнения $x_1 + x_2 + \dots + x_n = m$ при $m = 2$ и $m = 3$. При каком n число решений для $m = 3$ будет в четыре раза большим, чем число решений для $m = 2$?
4. В гостиной находится двое часов с боем, показывающих разное время. Каждый час они производят звуковые сигналы в количестве, на которое указывает часовая стрелка, при этом минутная стрелка направлена на 12. Интервал между сигналами для первых часов 3 сек., для вторых – 4 сек. Часы начали и закончили бой одновременно. Петя, находясь в соседней комнате, насчитал 13 ударов, принимая совпадающие сигналы за один. Какое время показывали первые и вторые часы в момент первого удара боя? Продолжительность одного сигнала мала и ее можно не учитывать, качество сигнала у обоих часов одинаковое.
5. Для всех целых $k < 0$ найти целые решения x и y системы
$$\begin{cases} x^2 + xy^2 - ky^2 = 0 \\ x^2 - xy + ky^2 = 0 \end{cases}.$$
6. Волк окружен собаками, расположенными в точках M, N, P и Q на сторонах квадрата $ABCD$, $M \in [A; B], N \in [B; C], P \in [C; D], Q \in [D; A]$ так, что $AM : MB = BN : NC = CP : PD = DQ : QA = 1 : 3$. Волк, находящийся внутри квадрата в точке пересечения прямых MP и NQ , может бежать со скоростью v_w по прямой в любом направлении. Собаки бегают только по сторонам квадрата со скоростью, не превосходящей v_c . Волк может вырваться из окружения, если на границе квадрата встретит не более одной собаки. При каких значениях отношения v_c / v_w волк имеет шанс спастись?

2.8. Заключительный тур олимпиады «Росатом», 11 класс (Саров, Киров, Тамбов, Санкт-Петербург)

1. Найти целые решения x и y уравнения $27 \cdot 4^x - 30 \cdot 2^x \cdot 3^y + 8 \cdot 9^y = 0$.
2. Найти все пары чисел $(x; y)$ в квадрате $0 \leq x \leq \pi$, $-\pi \leq y \leq 0$, удовлетворяющие системе
$$\begin{cases} \sin^3 x - 4 \sin^2 x \cos y + 5 \sin x \cos^2 y - 2 \cos^3 y = 0 \\ 2 \sin^2 x - \cos y = 0 \end{cases}.$$
3. Найти многочлен $P(x)$ степени 3, удовлетворяющий тождеству $P(x+2) - 2P(x+1) + P(x) \equiv x$ по переменной x , делящийся на $x-1$ без остатка, для которого $P(2) = 1$.
4. Найдите целые числа $x > 0$, $y > 0$, для которых $(x-y)^2 + 3x - 2y = 23$.
5. При каких значениях a система
$$\begin{cases} |x - a + 3| + |y - a| = 1 \\ |x + a^2 - 1| + |y - a^2| = 1 \end{cases}$$
 имеет ровно два решения?
6. Заяц оказался загнанным двумя собаками в круг радиуса 40 и находится в точке A , отстоящей от центра круга O на расстояние 20. Собаки находятся на концах диаметра круга, проходящего через точки A и O . Они могут преследовать зайца только по границе круга со скоростью, не превосходящей v_d . Заяц может убежать от собак по прямой с постоянной скоростью v_h . Он спасется, если сумеет выбежать из круга, не встретив на своем пути собаку. При каких значениях отношения $v_h : v_d$ у зайца есть шанс спастись?

2.9. Заключительный тур олимпиады «Росатом», 11 класс (Сергиев Посад, Обнинск)

1. При каких y выражение $\frac{\log_{4y}(y/2)}{\log_2 y + 2}$ принимает наибольшее возможное значение? Найти это значение.

2. Найти все значения x , при которых найдется число a , для которого

$$\cos a - \cos 2a = \frac{16x^2 - 75x + 5}{16(x^2 - 4)}.$$

3. Найти все целые x , для которых число $7x + 2$ является квадратом целого числа.

4. Известно, что для любого n сумма квадратов первых n натуральных чисел $1^2 + 2^2 + 3^2 + \dots + n^2$ является значением многочлена $P_3(n)$ третьей степени. Найти его коэффициенты и сумму квадратов 25 первых членов арифметической прогрессии a_m с первым членом $a_1 = -2$ и разностью $d = 3$.

5. При каждом значении $\alpha \in [\pi/2; \pi]$ решить систему

$$\begin{cases} (x - |x|) \cos \alpha + (y - |y|) \sin \alpha = 2\sqrt{3} \\ x \sin \alpha - y \cos \alpha = 1 \end{cases}.$$

6. Две окружности K_1 и K_2 с радиусами 1 и 2 расположены на сфере радиуса 5 и касаются друг друга. Третья окружность K также находится на сфере и касается окружностей K_1 и K_2 в различных точках. Найти наибольшее возможное значение радиуса окружности K .