

2.17. Отборочный тур олимпиады «Росатом», 7 класс

1. Не вычисляя числитель и знаменатель дроби $\frac{143 \cdot 256 + 50}{144 \cdot 255 - 60}$, установить является ли данная дробь правильной? Ответ обосновать.
2. Воздушные шары продавались по цене 7 руб. 50 коп. за штуку. В связи с ненастной погодой шары продавались плохо и пришлось снизить цену, но не более, чем на 33% их первоначальной стоимости. После снижения цены шары удалось продать и вырученная за них сумма оказалась равной 224 руб. 3 коп. На сколько была снижена цена шарика и сколько шариков было продано?
3. Найти целые числа x и y , для которых $2^{x+5} + 3^{y-2} = 259$.
4. Петя имел в кармане 500р и пошел в магазин для покупки 36 одинаковых тетрадей. В кассе он получил чек, на котором первая и последняя цифры не пропечатались. Вот что увидела его мама на чеке $\square 52,2 \square$, где внутри прямоугольников должны были стоять некоторые цифры. Немного подумав, мама назвала цену тетради. Сколько стоит одна тетрадь и какую сумму заплатил Петя?
5. Два угла треугольника равны 37° и 75° . Найти угол между биссектрисой и высотой, проведенных из третьей вершины.

Ответы и решения

Задача 1 Ответ: является.

Решение

$$143 \cdot 256 + 50 \vee 144 \cdot 255 - 60 \rightarrow (144 - 1) \cdot (255 + 1) + 50 \vee 144 \cdot 255 - 60$$

$$144 \cdot 255 - 111 + 50 \vee 144 \cdot 255 - 60 \rightarrow 110 < 111$$

Задача 2 Ответ: 1) на 2 руб. 29коп. 2) 43 шарика

Решение

Пусть цена уменьшилась на x коп, всего было продано n шаров. Тогда $(750 - x) \cdot n = 22403 = 43 \cdot 521$. Числа 43 и 521 простые, поэтому возможны варианты:

$$1. \begin{cases} 750 - x = 1 \rightarrow x = 749 \\ n = 22403 \end{cases} \quad \text{Падение цены более 33\%}$$

$$2. \begin{cases} 750 - x = 43 \rightarrow x = 707 \\ n = 521 \end{cases} \quad \text{Падение цены более 33\%}$$

$$3. \begin{cases} 750 - x = 521 \rightarrow x = 229 \\ n = 43 \end{cases} . \text{ Падение цены } \frac{229}{750} \cdot 100\% \approx 30,5\% < 33\%$$

Задача 3. Ответ: 1) $\begin{cases} x = 3 \\ y = 3 \end{cases}$ 2) $\begin{cases} x = -1 \\ y = 7 \end{cases}$

Решение

Выпишем все степени числа 3 не превосходящие 259 : 1, 3, 9, 27, 81, 243. Разность между числом 259 и степенью тройки должна быть степенью двойки.

$$259-1=258, \quad 259-3=256=2^8, \quad 259-9=250, \quad 259-27=232, \quad 259-81=178, \quad 259-243=16=2^4$$

Таким образом,

$$2^8 + 3^1 = 259 \rightarrow x + 5 = 8, \quad y - 2 = 1 \rightarrow \begin{cases} x = 3 \\ y = 3 \end{cases}$$

$$2^4 + 3^5 = 259 \rightarrow x + 5 = 4, \quad y - 2 = 5 \rightarrow \begin{cases} x = -1 \\ y = 7 \end{cases}$$

Задача 4 Ответ: 1) 4р 23коп 2) 152р 28коп

Решение

Пусть $x522y$ - искомая цена в копейках. Это число должно делиться на 9, поэтому $x + y = 9k, k \in \mathbb{Z}$. Кроме того, оно должно делиться на 4, т.е. $2y = 4 \cdot m, m \in \mathbb{Z}$.

Возможные варианты для второго условия $y = 0; 4; 8$

Случай 1. $y = 0$

$$x = 9k \rightarrow x = 9 \rightarrow \Sigma = 952,20 \rightarrow a = 26,45$$

Случай 2. $y = 4$

$$x + 4 = 9k \rightarrow x = 5 \rightarrow \Sigma = 552,24 \rightarrow a = 15,34$$

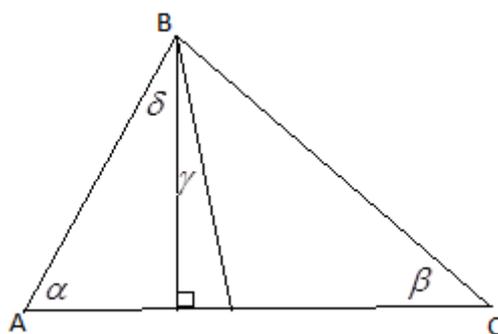
Случай 3. $y = 8$

$$x + 8 = 9k \rightarrow x = 1 \rightarrow \Sigma = 152,28 \rightarrow a = 4,23$$

С учетом ограничения суммы в 500р, реализуется только случай 3.

Задача 5 Ответ: 19°

Решение



$$\delta = 90^\circ - \alpha, \quad \frac{180^\circ - \alpha - \beta}{2} = \delta + \gamma \rightarrow \gamma = \frac{180^\circ - \alpha - \beta}{2} - (90^\circ - \alpha) = \frac{\alpha - \beta}{2}$$

$$\text{В варианте } \alpha = 75^\circ, \beta = 37^\circ, \text{ тогда } \gamma = \frac{75 - 37}{2} = 19^\circ$$