2.2. Отборочный тур олимпиады «Росатом», 11 класс

1. Найти без помощи производных множество значений функции $f(x)=\dfrac{7x^2+22x+16}{x^2+2x+2}$.

2. Найти значение $\cos 2x$, если x – решение уравнения $\sin\left(x+3arctg\sqrt[6]{2}\right)=3\sin\left(arctg\sqrt[6]{2}-x\right)$.

3. Найти все натуральные x , при которых выражение $(x-2)^{x+1}-(x+2)^x$ делится на 3 без остатка.

4. Арифметическая прогрессия $\{a_n\}$ обладает тем свойством, что

квадрат каждого ее члена является некоторым членом той же

прогрессии. Найти разность прогрессии, если ее первый член $a_1=3$.

5. Найти значения параметра a , при котором система неравенств $\begin{cases}|x-3a+3|+|y-2a|\le 2\\ |x|+|y|\le 6\end{cases}$ имеет

наибольшее возможное число

целочисленных решений $(x;y)$.

6. Ребра AB и CD треугольной пирамиды $ABCD$ взаимно перпендикулярны и по длине равны 4 . Длины ребер BC и BD равны 3 и 2 , а длины ребер AC и AD равны $2\sqrt{3}$ и $\sqrt{17}$ соответственно. Найти объем пирамиды.

Ответы и решения

Задача 1 Ответ: $E_f=[-1;9]$

Решение

Число $a\in E_f$, если уравнение $\dfrac{7x^2+22x+16}{x^2+2x+2}=a$ имеет решение:

$x^2+2x+2\neq 0\to 7x^2+22x+16=ax^2+2ax+2a\to (a-7)x^2+2(a-11)x+2a-16=0$.

При $a\neq 7$ квадратное уравнение имеет решение, если его дискриминант неотрицателен:

$D/4=(a-11)^2-(a-7)(2a-16)\ge 0\to a^2-8a-9\le 0\to a\in[-1,9],\ a\neq 7$.

При $a=7$ уравнение примет вид: $-8x-2=0$ и оно также имеет решение $x=-1/4$. Поэтому $a=7$ также принадлежит области значений функции.

Задача 2 Ответ: $\cos 2x=-\dfrac{1}{3}$

Решение

Обозначение $a=arctg\sqrt[6]{2}$.

Решение уравнения $\sin(x+3a)=3\sin(a-x)$:

$\sin x\cos 3a+\cos x\sin 3a=3(\sin a\cos x-\cos a\sin x)\to$

$\to \sin x(\cos 3a+3\cos a)+\cos x(\sin 3a-3\sin a)=0\to$

$\to 4\sin x\cdot\cos^3 a-4\cos x\cdot\sin^3 a=0\to tgx=tg^3a=\sqrt{2}$

Функция $\cos 2x=\dfrac{1-tg^2x}{1+tg^2x}=\dfrac{1-2}{1+2}=-\dfrac{1}{3}$

Задача 3 Ответ: $x=6m,\ m\in Z,\ m\ge 1$

Решение

Обозначение: $a \overset{p}{=} b$, если $a - b$ делится на p . Свойства: если $a \overset{p}{=} b$ и $c \overset{p}{=} d$, то $a \cdot c \overset{p}{=} b \cdot d$ и $a + c \overset{p}{=} b + d$, $a^k \overset{p}{=} b^k$ для любых натуральных k .

Случай 1. $x = 3m$

Тогда

$$(x-2) = 3m - 2 \overset{3}{=} 1 \to (x-2)^{x+1} \overset{3}{=} 1$$

$$(x+2) = 3m + 2 \overset{3}{=} -1 \to (x+2)^{x} \overset{3}{=} (-1)^{3m} = (-1)^{m}$$

Если $m = 2k$ четное, то выражение $(x-2)^{x+1} - (x+2)^{x} \overset{3}{=} 1 - 1 = 0$, т.е. делится на 3 без остатка и $x = 6k,\ k \in Z,\ k \ge 1$.

Случай 2. $x = 3m + 1$

Тогда

$$(x-2) = 3m - 1 \overset{3}{=} -1 \to (x-2)^{x+1} \overset{3}{=} (-1)^{3m+2} = (-1)^{m}$$

$$(x+2) = 3m + 3 \overset{3}{=} 0 \to (x+2)^{x} \overset{3}{=} 0$$

выражение $(x-2)^{x+1} - (x+2)^{x} \overset{3}{=} (-1)^{m} \ne 0$.

Таким образом, в случае 2 выражение не делится на 3 ни при каких m .

Случай 3. $x = 3m - 1$

Тогда

$$(x-2) = 3m - 3 \overset{3}{=} 0$$

$$(x+2) = 3m + 1 \overset{3}{=} 1 \to (x+2)^{x} \overset{3}{=} 1`$$

и выражение $(x-2)^{x+1} - (x+2)^{x} \overset{3}{=} (-1) \ne 0$.

Таким образом, в случае 3 выражение не делится на 3 ни при каких m .

Задача 4 Ответ: четыре решения $d = 1, 2, 3, 6$

Решение

Для любого n найдется m , для которого $a_n^2 = a_m \to (3 + d(n-1))^2 = 3 + d(m-1)$. Это возможно только для $d > 0$. Обозначение $t = n - 1$. Тогда $d(m-1) = 6 + 6dt + d^2t^2 \to m - 1 = \frac{6}{d} + 6t + dt^2$. По условию, правая часть равенства целое число при любых целых $t \ge 0$. Подставляя $t = 0$ приходим к тому, что $\frac{6}{d}$ – целое число. Тогда $dt^2 = m - 1 - \frac{6}{d} - 6t$ – целое число при любых t . Полагая $t = 1$ получим, что $d = m - 7 - \frac{6}{d}$ - целое число. Тогда искомая разность прогрессии $d > 0$ и является делителем числа 6.

Задача 5 Ответ: $a = 0,\ a = 1$

Решение.

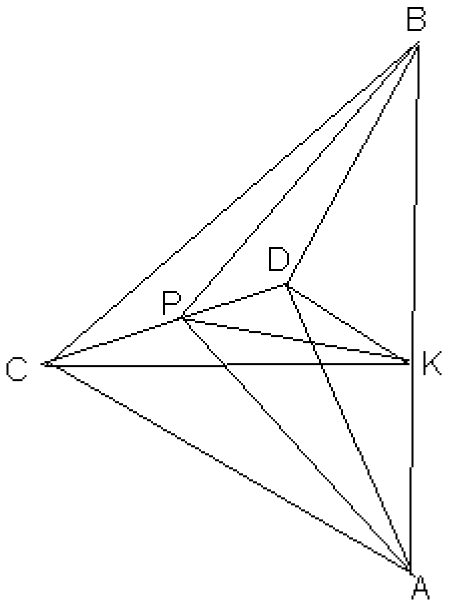
Число целочисленных решений $(x; y)$ первого неравенства в системе не превосходит 13 для любого a и равно 13 при целых a . Геометрический портрет первого неравенства – квадрат с диагоналями, параллельными координатным осям, по длине равными 4, центр которого расположен в точке $(3a - 3; 2a)$. При целых a в нем помещается 13 точек с целыми координатами, при нецелых a таких точек меньше. Точек $\begin{cases} x = 3n - 3 \\ y = 2n \end{cases},\ n \in Z$ внутри квадрата $|x| + |y| \le 6$ всего две:

$$|3n - 3| + |2n| \le 6 \leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} n \ge 1 \\ 5n \le 9 \end{cases} \to n = 1 \\ \begin{cases} n \le 0 \\ 5n \ge -3 \end{cases} \to n = 0 \end{array} \right. .$$

При $n = 0$ квадрат $\left|x + 2\right| + \left|y\right| \le 2$ полностью принадлежит квадрату $\left|x\right| + \left|y\right| \le 6$ и поэтому у системы 13 целочисленных решений. При $n = 1$ точки с целочисленными координатами квадрата $\left|x\right| + \left|y - 2\right| \le 2$ лежат в квадрате $\left|x\right| + \left|y\right| \le 6$, а система имеет наибольшее число решений 13.

Задача 6 Ответ: $V = \dfrac{\sqrt{71}}{3}$

Решение.



$BP = h_1,\ AP = h_2,\ KP = h_3$

1) $\sqrt{4 - h_1^2} + \sqrt{9 - h_1^2} = 4 \quad u_1 = \sqrt{4 - h_1^2},\ v_1 = \sqrt{9 - h_1^2} \to \begin{cases} u_1 + v_1 = 4 \\ v_1^2 - u_1^2 = 5 \end{cases} \to \begin{cases} u_1 + v_1 = 4 \\ v_1 - u_1 = \dfrac{5}{4} \end{cases}$

$v_1 = \dfrac{21}{8} \to h_1^2 = \dfrac{135}{64}$

2) $\sqrt{17 - h_2^2} + \sqrt{12 - h_2^2} = 4,\ h_2^2 = \dfrac{647}{64}$

3) $\sqrt{\dfrac{647}{64} - h_3^2} + \sqrt{\dfrac{135}{64} - h_3^2} = 4 \to h_3^2 = \dfrac{71}{64}$

4) $V = \dfrac{1}{3} S_{ABP} \cdot CD = \dfrac{1}{3} \cdot \dfrac{1}{2} \cdot \dfrac{\sqrt{71}}{8} \cdot 4 \cdot 4 = \dfrac{\sqrt{71}}{3}$

2.3. Очный отборочный тур олимпиады «Росатом», 11 класс

1. Найти целые решения уравнения $x^2 + xy^2 - 10y^2 = 0$.

2. Числа $(x; y)$ являются решениями уравнения

$$2\sin x - 2\sin y = \sin\frac{x+y}{2} + \sin\frac{x-3y}{2} .$$

Найти наибольшее возможное значение выражения $\sin^2\frac{x+y}{2} + \cos y$.

3. Натуральное число a такое, что сумма его цифр и сумма цифр числа $a+1$ делятся на 77 без остатка. Среди таких чисел найти 1) все числа с минимально возможной суммой цифр; 2) минимально возможное a .

4. Найти целые решения уравнения $2(x-2) + 2\sqrt{x^2 - 3x + 5} = (x-2)(x+1)$.

5. При каких значениях a система $\begin{cases} x^4 = ax^2 + 4y^2 \\ y^4 = 4x^2 + ay^2 \end{cases}$ имеет ровно 5 решений?

6. Прямые l_1, l_2 и l_3 на плоскости параллельны, расстояния между прямыми l_1, l_2 и l_2, l_3 равны 1 и 2 соответственно (прямая l_2 расположена между прямыми l_1 и l_3). Вершины равностороннего треугольника ABC лежат на прямых l_1, l_2 и l_3 . Найти длину стороны треугольника.

Ответы и решения

Задача 1 Ответ: $\begin{cases} x = 9 \\ y = \pm 9 \end{cases}$, $\begin{cases} x = 6 \\ y = \pm 3 \end{cases}$, $\begin{cases} x = -15 \\ y = \pm 3 \end{cases}$, $\begin{cases} x = -90 \\ y = \pm 9 \end{cases}$, $\begin{cases} x = 0 \\ y = 0 \end{cases}$

Решение

При $y = 0 \to x = 0$. Для $y \neq 0$ разделим левую часть уравнения $x^2 + xy^2 - 10y^2 = 0$ на y^2 :

После замены $t = \frac{x}{y}$, получим $t^2 + x - 10 = 0 \to x = 10 - t^2 \to y = \frac{x}{t} = -t + \frac{10}{t}$. Число t^2 должно быть целым. Докажем, что t также целое. По условию $t = \frac{p}{q}$ – несократимая дробь. Покажем, что $q = 1$: $y = -\frac{p}{q} + \frac{10 \cdot q}{p} \to ypq = -p^2 + 10q^2 \to p$ делится на q и дробь $\frac{p}{q}$ сократима, если $q \neq 1$. Тогда $t = p$ и $\begin{cases} y = -p + \dfrac{10}{p} \\ x = 10 - p^2 \end{cases}$. Число y целое, если p делитель числа 10.

1. $p = 1 \to \begin{cases} x = 9 \\ y = 9 \end{cases}$ 2. $p = -1 \to \begin{cases} x = 9 \\ y = -9 \end{cases}$ 3. $p = 2 \to \begin{cases} x = 6 \\ y = 3 \end{cases}$ 4. $p = -2 \to \begin{cases} x = 6 \\ y = -3 \end{cases}$

5. $p = 5 \to \begin{cases} x = -15 \\ y = -3 \end{cases}$ 6. $p = -5 \to \begin{cases} x = -15 \\ y = 3 \end{cases}$ 7. $p = 10 \to \begin{cases} x = -90 \\ y = -9 \end{cases}$ 8. $p = -10 \to \begin{cases} x = -90 \\ y = 9 \end{cases}$

Задача 2 Ответ: $\frac{7}{4}$

Решение

Преобразование: $4\sin\frac{x-y}{2}\cdot\cos\frac{x+y}{2}=2\sin\frac{x-y}{2}\cdot\cos y\to\sin\frac{x-y}{2}\left(2\cos\frac{x+y}{2}-\cos y\right)=0$.

1 случай. $\sin\frac{x-y}{2}=0\to x=y+\pi k,\ k\in Z$.

Тогда $F=\sin^2\frac{x+y}{2}+\cos y\Big|_{x=y+2\pi k}=\sin^2 y+\cos y,\ \forall y\in R$. Обозначая $t=\cos y\in[-1;1]$, получим

$F=-t^2+t+1,\ t\in[-1;1],\ F(-1)=-1,\ F(1)=1,\ F\left(\frac{1}{2}\right)=\frac{5}{4}\ .\to\ F_{\max}=\frac{5}{4}$

2 случай. $\cos\frac{x+y}{2}=\frac{1}{2}\cos y$.

$\forall y\in R\ \exists x$ являющийся решением уравнения. Тогда

$F=\sin^2\frac{x+y}{2}+\cos y=1-\cos^2\frac{x+y}{2}+\cos y=1-\frac{1}{4}\cos^2 y+\cos y,\ \forall y\in R$.

Обозначая $t=\cos y\in[-1;1]$, получим $F==-\frac{1}{4}t^2+t+1,\ \forall t\in[-1;1],\ \ F(-1)=-\frac{1}{4},\ F(1)=\frac{7}{4}$

$\to\ F_{\max}=\frac{7}{4}\to$

Задача 3 Ответ: 1) $a=a_1a_2...a_k\underbrace{99...9}_{60}$, где $k\geq 9$, $a_1,a_2,...,a_k$ – цифры, $a_1\geq 1,\ a_k\leq 8$, сумма $a_1+a_2+...+a_k$ которых равна 76.

2) $a=5\underbrace{99...9}_{7}8\underbrace{99...9}_{60}$

Решение

Если десятичная запись числа a не заканчивается на 9, то такое число не может удовлетворять условию задачи. Действительно, тогда суммы цифр чисел a и $a+1$ отличаются на 1 и поэтому не могут делится без остатка на 77 одновременно.

Предположим, что a имеет вид: $a=a_1a_2...a_k\underbrace{99...9}_{n-k}$, где $a_1,a_2,...,a_k,\quad a_k\neq 9$ – цифры, k - число цифр старших разрядов, n - общее число разрядов, $n-k$ – число девяток в младших разрядах.

Пусть $\sum a$ – обозначение суммы цифр числа a . Тогда, по условию, найдутся целые $m,\ l$, для которых $\sum a=a_1+a_2+...+a_k+9(n-k)=77m,\ m\in Z$ и

$\sum(a+1)=a_1+a_2+...+a_k+1=77l,\ l\in Z$.

Вычитая одно из другого, получим $9(n-k)-77(m-l)=1$. Это диафантовое уравнение имеет решения $\begin{cases} n-k=77t-17 \\ m-l=9t-2 \end{cases},\ \forall t\in Z$. С учетом положительности $n-k$ и $m-l$ имеем $t\geq 1$.

Минимальному значению суммы цифр младших разрядов $9\cdot(n-k)$ соответствует $t=1$, т.е. число девяток не может быть меньше 60. Сумма цифр старших разрядов $a_1+a_2+...+a_k=77l-1$ минимальна при $l=1$ и равна 76. Поскольку $a_1+a_2+...+a_k\leq 9(k-1)+8$, то $76\leq 9(k-1)+8\to k\geq 9$.

Таким образом, ответом на первый вопрос задачи является: $a=a_1a_2...a_k\underbrace{99...9}_{60}$, где $k\geq 9$, $a_1,a_2,...,a_k$ – цифры, $a_1\geq 1,\ a_k\leq 8$, сумма $a_1+a_2+...+a_k$ которых равна 76.

Множество таких чисел не пустое, например, $a=\underbrace{111...1}_{76}9\underbrace{99...9}_{60}$ ему принадлежит.

Для ответа на второй вопрос задачи, заметим, что минимальное число $n-k$ младших разрядов равно 60. Минимальному a соответствует минимальное $k=9$ и минимальное число $b=a_1a_2...a_9$, сумма цифр которого равна 76. Таким числом b является $b=599999998$.

Тогда $a=5\underbrace{99...9}_{7}8\underbrace{99...9}_{60}$

Задача 4 Ответ: $x_1=-1$, $x_2=4$

Решение

Обозначения: $u = x-2,\ v = x+1 \to v-u = 3$. В этих обозначениях уравнение примет вид:

$2u + 2\sqrt{u^2+v} = uv \to u(v-2) = 2\sqrt{u^2+v}$. Условие разрешимости: $u(v-2) \ge 0$.

Возведем в квадрат: $u^2(v-2)^2 = 4\left(u^2+v\right) \to -4u^2v + u^2v^2 = 4v$.

Случай $v = 0$ приводит к $u = -3$ и $x = -1$.

При $v \ne 0$ имеем $v - 4 = \dfrac{4}{u^2}$. Из цело численности x следует, что u и v также целые. Более того, $v = u + 3 \ge 4 \to u \ge 1$.

При $u = 1$ имеем $v = 8$ и $v - u \ne 3$. При $u = 2$ $v = 5$ и $x = 4$ - решение. При других целых u число v не является целым.

Задача 5 Ответ: $a \in (-4; +\infty)$

Решение

Замена $u = x^2 \ge 0,\ v = y^2 \ge 0$. Тогда исходная система примет вид: $\begin{cases} u^2 = au + 4v \\ v^2 = 4u + av \end{cases}$.

Каждой паре $(u;v)$, $u > 0,\ v > 0$ соответствует 4 решения исходной системы.

Решение системы: $\begin{cases} u^2 - v^2 = (u-v)(a-4) \\ u^2 = au + 4v \end{cases} \to \begin{cases} (u-v)(u+v+4-a) = 0 \\ u^2 = au + 4v \end{cases}$.

Случай 1. $\begin{cases} u = v \ge 0 \\ u^2 = au + 4v \end{cases} \to \left[\begin{array}{l} \begin{cases} u = 0 \\ v = 0 \end{cases},\ \forall a \\ u = v = a + 4 > 0 \to a > -4 \end{array} \right.$.

При $a > -4$ исходная система имеет 5 решений, соответствующий случаю 1.

Случай 2 . $\begin{cases} u \ge 0, v \ge 0,\ u \ne v \\ u + v = a - 4 \ge 0 \to a \ge 4 \\ v = \dfrac{1}{4}u(u-a) \end{cases}$.

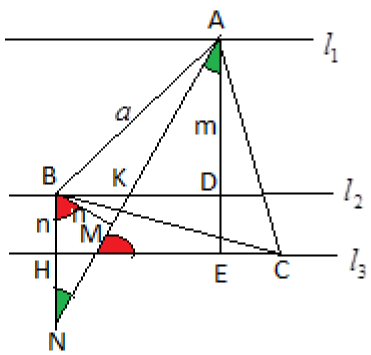
При $a = 4 \to u = 0, v = 0$ - в случай 2 не входит.

Выразим $v = a - 4 - u \ge 0 \to 0 \le u \le a - 4$ и подставим во второе уравнение:

$f(u) = u^2 - (a-4)u - 4(a-4) = 0$. Это уравнение не имеет положительных решений на отрезке $[0; a-4]$ при $a > 4$, поскольку $f(0) = f(a-4) = -4(a-4) < 0$, вершина параболы имеет абсциссу $u = \dfrac{a-4}{2} > 0$. (один корень отрицательный, другой больше $a - 4$ и соответствующее ему $v < 0$

Задача 6 Ответ: $a = \dfrac{2}{\sqrt{3}}\sqrt{m^2 + mn + n^2} = 2\sqrt{\dfrac{7}{3}}$

Решение:



Построение:

1. Опустим из произвольной точки B на прямой l_2 перпендикуляр BH на прямую l_3 .

2. Повернем отрезок BH на 60^0 (точка H перейдет в точку M)
3. Через точку M проведем прямую NA , перпендикулярную отрезку BM . Точка A пересечения прямой NA с прямой l_1 является образом вершины C при преобразовании поворота. Углы $\angle HBM = \angle AMC = 60^0$, $\angle BNA = \angle MAE = 30^0$ по построению.
4. $$BM = n \to BN = 2n \to BK = \frac{2n}{\sqrt{3}},\ KD = \frac{m}{\sqrt{3}} \to BD = \frac{2n+m}{\sqrt{3}}$$
$$AB^2 = a^2 = m^2 + \frac{(2n+m)^2}{3} = \frac{4}{3}\left(n^2 + nm + m^2\right)$$

В варианте 1 $m = 1, n = 2 \to a = 2\sqrt{\frac{7}{3}}$.

2.4. Очный отборочный тур олимпиады «Росатом», 11 класс

1. При каком минимальном a уравнение $x(x+2)(x+6)=\dfrac{a}{x+8}$ имеет решения?

2. Найти наибольшее значение выражения $2\cos^2 x+3\sin 2x+10\sin^2 x$.

   При каких x оно достигается?

3. Целые, положительные числа $(x;y;z)$ связаны соотношением

$12\left(x^2+y^2\right)=5z\cdot(x+y)$. Найти эти числа, если известно, что они ,

расположенные в порядке x,y,z, являются тремя последовательными членами некоторой геометрической прогрессии.

4. При каких a и b многочлен

$$P(x)=x^5+(a-2)x^4+(b-2a+1)x^3+(a-2b+2)x^2+(b-4)x+2$$

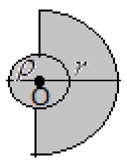
делится на $(x-1)^n$ без остатка в максимально возможной степени n. Найти n.

5. При каких целых a уравнение $(a+1+x)^3-4\left(a^3+1+x^3\right)+12ax=0$ имеет

   только целые решения? Найти эти решения.

6. В точке A сферы с центром в точке O и радиуса 4 находится источник света.

На плоскости, проходящей через точку O и перпендикулярной прямой AO, внутри сферы, расположена мишень, изображенная на рис. Точка O на мишени совпадает с центром сферы, радиусы ρ и r кругов, по которым вырезалась мишень, равны 1 и 3 соответственно. Найти площадь тени от мишени на поверхности сферы.



Ответы и решения

Задача 1 Ответ: $a_{\min}=-36$

Решение

Преобразование: $x\left(x(x+8)+12\right)=\dfrac{a}{x+8}$.

Обозначение: $t=x(x+8)\in[-16;+\infty)$, $t\neq 0$. Тогда $a=t^2+12t$. Минимальное значение a достигается при $t=-6\in[-16;+\infty)$ и равно -36.

Задача 2 Ответ: 1) $f_{\max}=11$ 2) $x=arctg\,3+\pi k,\ k\in Z$

Решение

При $\cos x = 0$ значение выражения равно 10. Если $\cos x \neq 0$, то $2\cos^2 x + 3\sin 2x + 10\sin^2 x = 2\cos^2 x\left(1 + 3tgx + 5tg^2 x\right) = 2\cdot\dfrac{1 + 3tgx + 5tg^2 x}{1 + tg^2 x}$.

Обозначение: $t = tgx \in \left(-\infty;+\infty\right)$. Если выражение принимает значение a, то уравнение $2\cdot\dfrac{1 + 3t + 5t^2}{1 + t^2} = a \to (10 - a)t^2 + 6t + 2 - a = 0$ имеет решение.

Если $a = 10$, то $t = 4/3$. Если $a \neq 10$, то дискриминант $D/4 = 9 + (a-2)(10-a) \geq 0 \to a^2 - 12a + 11 \leq 0 \to a \in [1;11]$.

Максимальное значение выражения равно 11. Оно достигается при $t = \left\{-\dfrac{b}{2a}\right\} = \dfrac{3}{a-10}\Big|_{a=11} = 3 \to tgx = 3 \to x = arctg\,3 + \pi k,\ k \in Z$

Задача 3 Ответ: $x = t,\ y = 2t,\ z = 4t,\ t \in Z, t > 0$

Решение

Условие задачи приводит к системе $\begin{cases} y^2 = xz \\ 12(x^2 + y^2) = 5z(x+y) \end{cases}$. Замена $\begin{cases} u = \dfrac{y}{x} \\ v = \dfrac{z}{x} \end{cases}$ дает возможность перейти с системе $\begin{cases} v = u^2 \\ 12\left(1+u^2\right) = 5v(1+u) \end{cases} \to \begin{cases} v = u^2 \\ 5u^3 - 7u^2 - 12 = 0 \end{cases} \to \begin{cases} v = u^2 \\ (u-2)(5u^2 + 3u + 6) = 0 \end{cases}$.

Второе уравнение в системе имеет единственное решение $u = 2$, поэтому $x = t,\ y = 2t,\ z = 4t$.

Условие положительности и цело численности приводит к тому, что $t > 0,\ t \in Z$.

Задача 4 Ответ: $a = 0,\ b = -3,\ n = 4,\ P(x) = (x-1)^4(x+2)$

Решение

$P(1) = 0$ при любых a и b. Разделим углом $P(x)$ на $x - 1$: $P(x) = (x-1)\cdot P_1(x)$, где

$P_1(x) = x^4 + (a-1)x^3 + (b-a)x^2 + (2-b)x - 2$

$P_1(1) = 0$ при любых a и b. Разделим углом $P_1(x)$ на $x - 1$: $P_1(x) = (x-1)\cdot P_2(x)$, где

$P_2(x) = x^3 + ax^2 + bx + 2$

$P_2(1) = a + b + 3 = 0$ (условие на a и b) Тогда $P_2(x) = (x-1)P_3(x)$, где

$P_3(x) = x^2 + (a+1)x + (a+b+1)$. При делении $P_3(x)$ на $(x-1)$ возникает остаток $2a + b + 3$, приравняв который к нулю, получим второе условие на a и b.

Решением системы $\begin{cases} a + b + 3 = 0 \\ 2a + b + 3 = 0 \end{cases}$ являются $a = 0,\ b = -3$. Тогда $P(x) = (x-1)^4(x+2)$.

Число $n = 4$.

Задача 5 Ответ:

1) при $a \in Z,\ a < 0$ и $a > 0, a \in Z, a \neq t^2, t \in Z$ - единственное решение $x = -1 - a$.

2) при $a = t^2,\ t \in Z, t \neq 0$ - три решения $x_1 = -1 - t^2,\quad x_2 = \left(t-1\right)^2,\quad x_3 = \left(t+1\right)^2$

3) при $a = 0$ два решения $x_1 = 1,\ x_2 = -1$

Решение

Преобразование левой части ($b=1$) уравнения:
$(a+b+x)^3-4\left(a^3+b^3+x^3\right)+12abx=(a+b+x)^3-4\left((a+b)^3+x^3-3a^2b-3ab^2\right)+12abx=$

$=(a+b+x)^3-4\left((a+b+x)((a+b)^2-x(a+b)+x^2)-3ab(a+b)\right)+12abx=$

$=(a+b+x)^3-4(a+b+x)((a+b)^2-x(a+b)+x^2)+12ab(a+b+x)=$.

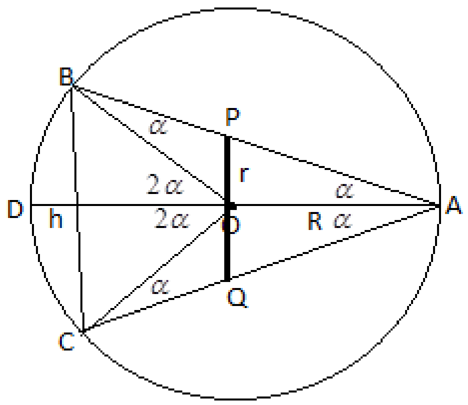
$=(a+b+x)\left((a+b+x)^2-4((a+b)^2-x(a+b)+x^2)+12ab\right)=$

$=(a+b+x)\left(-3(a+b)^2+6x(a+b)-3x^2+12ab\right)=-3(a+b+x)\left((a+b-x)^2-4ab\right)$

В варианте 1 $b=1$ поэтому решениями являются $\left[\begin{array}{l} x=-a-1 \\ (a+1-x)^2=4a \end{array}\right.$. При отрицательном целом $a=t$ второе уравнение в объединении решений не имеет. Первое уравнение дает единственное решение $x=-1-t$. При положительном a , целые решения второго уравнения возможны только при $a=t^2,\ t\in Z$ и $a+1-x=\pm 2t \to x=t^2\mp 2t+1=(t\pm 1)^2$. Помимо этих решений, из первого уравнения получим $x=-1-t^2$.

Задача 6 Ответ: $S=\frac{1}{2}\left(S_r+S_\rho\right)=\frac{5696\pi}{425}$

Решение варианта 1.
Решим задачу для мишени в виде круга радиуса r и сферы радиуса R .



$PQ-$ диаметр мишени. Поверхность тени – поверхность сегмента BDC сферы.

$\sin\alpha=\frac{r}{\sqrt{R^2+r^2}}$. $h-$ высота сегмента. $h=R-R\cos 2\alpha=2R\sin^2\alpha=\frac{2Rr^2}{R^2+r^2}$.

Тогда площадь тени $S_r=2\pi Rh=4\pi\cdot\frac{R^2r^2}{R^2+r^2}$.

В варианте 1 площадь тени $S=\frac{1}{2}\left(S_r+S_\rho\right)=2\pi R^2\left(\frac{r^2}{R^2+r^2}+\frac{\rho^2}{R^2+\rho^2}\right)$.

Ее значение при $R=4,\ r=3,\ \rho=1$ равно $S=\frac{5696\pi}{425}$

2.5. Очный отборочный тур олимпиады «Росатом», 11 класс

1. Найти квадратный трехчлен $f(x)$, удовлетворяющий тождеству по x

$f(x+1)-f(x)=x+2$, для которого $f(1)=0$.

2. Найти наибольшее значение $\log_2\left(3\pi^2+2\pi x-x^2\right)$, если x - решение

уравнения $64\sin^5 x+\dfrac{19}{\sin x}=64\cos^5 x+\dfrac{19}{\cos x}$.

3. Арифметическая прогрессия a_n с разностью $d=0,5$ такова, что для любого натурального числа n найдется член прогрессии a_m, равный сумме первых n ее членов. Найти a_1.

4. Натуральные числа x и y взаимно простые. Доказать, что

$$НОД\left(x+y,x^2+2y^2\right)\le 3.$$

5. Найти наименьшее возможное значение a, при котором система неравенств

$\begin{cases}-x-a-4\le y\le -x+\sqrt{a}\\ -9\le x\le -4,\ 2\le y\le 7\end{cases}$ имеет максимальное число целых решений $(x;y)$.

6. Точки M и N - середины ребер AD и BC основания правильной четырехугольной пирамиды $SABCD$ со стороной основания 2 и апофемой боковой грани $\sqrt{3}$. На апофеме боковой грани ASD расположена точка P так, что $MP:PS=1:2$. На апофеме боковой грани BSC расположена точка Q так, что $NQ:QS=1:3$. Точки P и Q соединены ломаной, лежащей на поверхности пирамиды. Найти наименьшую возможную длину ломаной.

Ответы и решения

Задача 1 Ответ: $f(x)=\dfrac{1}{2}\left(x^2+3x-4\right)$

Решение

Поищем функцию среди многочленов второй степени: $f(x)=ax^2+bx+c$ с некоторыми коэффициентами a,b,c.

$f(x+1)=a(x+1)^2+b(x+1)+c=f(x)+2ax+a+b\to$

$\to f(x+1)-f(x)=2ax+a+b\equiv x+2$

Тогда $\begin{cases}2a=1\\ a+b=2\end{cases}$ и $a=\dfrac{1}{2},\ b=\dfrac{3}{2}$. Условие $f(1)=0\to a+b+c=0\to c=-2$

Задача 2 Ответ: $\log_2\dfrac{575}{144}$ при $x=\dfrac{13\pi}{12}$

Решение

$$64(\sin^5 x - \cos^5 x) = 19\left(\frac{\sin x - \cos x}{\sin x \cos x}\right)$$

Преобразование уравнения:
$$64(\sin x - \cos x)(\sin^4 x + \sin^3 \cos x + \sin^2 x \cos^2 x + \sin x \cos^3 x + \cos^4 x) =$$
$$= 64(\sin x - \cos x)\left((\sin^2 x + \cos^2 x)^2 - \sin^2 x \cos^2 x + \sin x \cos x\right) =$$
$$= 64(\sin x - \cos x)\left(1 - \sin^2 x \cos^2 x + \sin x \cos x\right) = 19\left(\frac{\sin x - \cos x}{\sin x \cos x}\right).$$

Первая серия решений: $\sin x - \cos x = 0 \to x_1 = \frac{\pi}{4} + \pi k,\ k \in Z$.

Замена переменной: $t = \sin x \cos x \in [-0,5, 0,5]$ $. t \neq 0$

Тогда $64t(1 + t - t^2) = 19 \to 64t^3 - 64t^2 - 64t + 19 = 0$. Поиск рациональных корней уравнения дает $t_1 = \frac{1}{4}$ и разложение на множители $(4t-1)\left(16t^2 - 12t - 19\right) = 0$. Два других корня $t_2 = \frac{3+\sqrt{85}}{8} > \frac{1}{2},\ t_3 = \frac{3-\sqrt{85}}{8} < -\frac{1}{2}$ посторонние и им не соответствуют серии x . Корень t_1 приводит к уравнению: $\sin 2x = \frac{1}{2} \to \left[\begin{array}{l} x_2 = \frac{\pi}{12} + \pi k \\ x_3 = \frac{5\pi}{12} + \pi m, \quad k, m \in Z \end{array}\right.$.

Функция $y = \log_2\left(3\pi^2 + 2\pi x - x^2\right)$ определена для $x \in (-\pi; 3\pi)$ и принимает максимальное значение при $x_0 = \pi$. В серии x_1 наиболее близкими к $x_0 = \pi$ являются $x_1^* = \frac{5\pi}{4}$ и значение выражения в нем равно $\log_2 \frac{63\pi^2}{16} = \log_2 \frac{567\pi^2}{144}$. В серии x_2 наиболее близкими к $x_0 = \pi$ являются $x_2^* = \frac{13\pi}{12}$ и значение выражения в нем равно $\log_2 \frac{575\pi^2}{144}$. . В серии x_3 наиболее близкими к $x_0 = \pi$ являются $x_3^* = \frac{17\pi}{12}$ и значение выражения в нем равно $\log_2 \frac{551\pi^2}{144}$.

Таким образом, наибольшим значением выражения $\log_2\left(3\pi^2 + 2\pi x - x^2\right)$ на решениях уравнения будет $\log_2 \frac{575\pi^2}{144}$ принимаемый для $x_2^* = \frac{13\pi}{12}$.

Задача 3 Ответ: $a_1 = \frac{t}{2},\ t \in Z, t \geq 0$.

Решение

$$a_n = a_1 + 0,5(n-1),\ S_n = \left(a_1 + a_n\right)\cdot\frac{n}{2} = (2a_1 + 0,5(n-1))\cdot\frac{n}{2} = \frac{1}{4}n^2 + (a_1 - \frac{1}{4})n .$$

По условию, для любого натурального n существует натуральное m , для которого

$$a_m = S_n \to a_1 + 0,5(m-1) = \frac{1}{4}n^2 + (a_1 - \frac{1}{4})n \to m = \frac{1}{2}n^2 + \left(2a_1 - \frac{1}{2}\right)n - 2a_1 + 1$$

$$m = \frac{1}{2}\left(n^2 + (4a_1 - 1)n - 4a_1 + 2\right)$$

Проверим цело численность m :

1. $n = 2k+1,\ k \in Z$

$m = \frac{1}{2}\left(4k^2 + 4k + 1 + 8a_1k - 2k + 4a_1 - 1 + 2 - 4a_1\right) = 2k^2 + k + 1 + 4a_1k$ будет целым при любых k, если $4a_1$ – целое число.

2. $n = 2k,\ k \in Z$

$m = \frac{1}{2}\left(4k^2 + 8a_1k - 2k + 2 - 4a_1\right) = 2k^2 - k + 1 + 2a_1(k-1)$ будет целым числом при любых k, если $2a_1$ – целое число.

Объединяя два случая, получим $a_1 = \frac{t}{2},\ \ t \in Z$.

Найдем $t \in Z$, для которых $m \ge n$:

$n^2 + \left(4a_1 - 1\right)n - 4a_1 + 2 \ge 2n \to n^2 + (2t-3)n - 2t + 2 \ge 0,\ \ \forall n \ge 1$

$(n-1)(n+2t-2) \ge 0$

При $n = 1 \to m = 1 > 0$. При $2 - 2t \le 2 \to t \ge 0$ неравенство $n \ge 2 - 2t$ выполняется для всех $n \ge 2$. При $t < 0$ неравенство $m \ge n$ не выполняется для $n = 2, 3, \ldots, 2t - 1$, поэтому условию задачи удовлетворяют $a_1 = \frac{t}{2},\ t \in Z, t \ge 0$.

Задача 4

Решение

Воспользуемся свойством НОД: $\forall a,b,c \in N \to НОД\left(a,b\right) = НОД\left(a, b + ac\right)$.

Случай 1. $x > y$.

$НОД\left(x+y, x^2+2y^2\right) = НОД\left(x+y, x^2+2y^2+2(x+y)(x-y)\right) = НОД\left(x+y, 3x^2\right)$

Если $p \ge 4$ общий делитель чисел $x + y$ и $3x^2$, то $НОД\left(x, p\right) = p_1 > 1$. Тогда x делится на p_1, $x + y$ делится на p_1, а значит y также делится на p_1. Таким образом, $НОД\left(x, y\right) \ge p_1 > 1$. Последнее противоречит взаимной простоте x и y.

Случай 2. $x < y$. $НОД\left(x+y, x^2+2y^2\right) = НОД\left(x+y, x^2+2y^2+(x+y)(y-x)\right) = НОД\left(x+y, 3y^2\right)$.

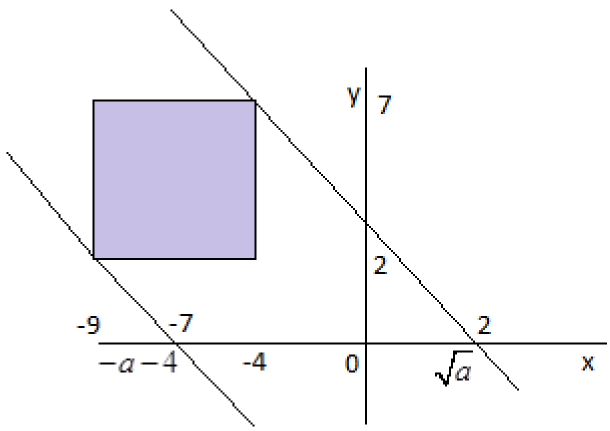
Как и в случае 1, предположение о существовании общего делителя $p \ge 4$ чисел $x + y$ и $3y^2$ приводит к противоречию с предположением о взаимной простоте x и y.

Неравенство $НОД\left(x+y, x^2+2y^2\right) \le 2$ может не выполняться, например, $x = 7,\ \ y = 5,\ \ НОД\left(x+y,\ x^2+2y^2\right) = НОД\left(12, 99\right) = 3$.

Задача 5 Ответ: $a_{\min} = 4$

Решение

В квадрате $-9 \le x \le -4,\ \ 2 \le y \le 7$ ровно 36 целых пар. Все они являются решениями системы, если



$\begin{cases} -a-4 \le -7 \\ \sqrt{a} \ge 2 \end{cases} \to a \ge 4$. Таким образом, $a = 4$ минимальное число , при котором система будет иметь 36 целых решений.

Задача 6 Ответ: $PQ = \dfrac{\sqrt{651}}{12} \approx 2{,}1$

Решение

Случай 1 .

Искомая ломаная выходит из грани ASD через ребро AS (или по симметрии через SD).

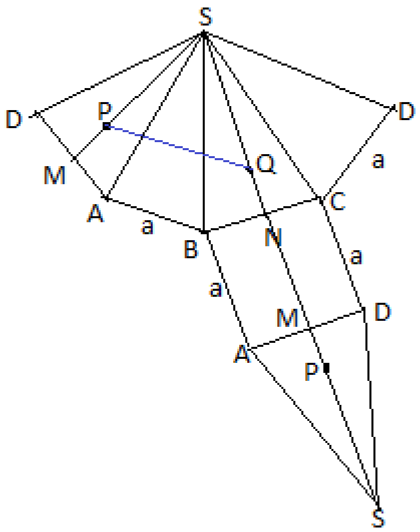
Тогда длина отрезка PQ на развертке (см. рис.) – наименьшая длина ломаной.

Из $\triangle SPQ$ $PQ^2 = PS^2 + QS^2 - 2PS \cdot QS \cdot \cos 2\alpha$, где α - угол при вершине пирамиды.

$PS = \dfrac{n}{m+n} \cdot b,\ QS = \dfrac{q}{p+q} \cdot b$, $\cos 2\alpha = \dfrac{16b^4 - 24a^2b^2 + a^4}{16b^4 + 8a^2b^2 + a^4}$.

В варианте 1 $m = 1,\ n = 2,\ a = 2,\ b = \sqrt{3},\ p = 1,\ q = 3$.

Тогда $PS = \dfrac{2\sqrt{3}}{3},\ QS = \dfrac{3\sqrt{3}}{4},\ \cos 2\alpha = -\dfrac{1}{2}$ и $PQ^2 = \dfrac{217}{48} \to PQ = \dfrac{\sqrt{651}}{12} \approx 2{,}1$.



Случай 2. Ломаная выходит через ребро AD .

Тогда (см. рис.) $PQ = \dfrac{p}{p+q} \cdot b + \dfrac{m}{m+n} \cdot b + a$. В условиях варианта 1 $PQ = 2 + \dfrac{7\sqrt{3}}{12} \approx 3{,}0$