2.7. Заключительный тур олимпиады «Росатом», 11 класс (Москва)

1. Найти наибольшее значение выражения $x-2y$ для $(x;y)$, удовлетворяющих уравнению $4x^2+9y^2=25$.

2. Найти все решения $(x;y)$ уравнения $(2\sin(x+y)+3)(\cos(2x-y)-1)=-10$, лежащие на прямой $6x+5y=15\pi$.

3. Найти зависимость от n числа целых неотрицательных решений уравнения $x_1+x_2+\ldots+x_n=m$ при $m=2$ и $m=3$. При каком n число решений для $m=3$ будет в четыре раза большим, чем число решений для $m=2$?

4. В гостиной находится двое часов с боем, показывающих разное время. Каждый час они производят звуковые сигналы в количестве, на которое указывает часовая стрелка, при этом минутная стрелка направлена на 12. Интервал между сигналами для первых часов 3 сек., для вторых – 4 сек. Часы начали и закончили бой одновременно. Петя, находясь в соседней комнате, насчитал 13 ударов, принимая совпадающие сигналы за один. Какое время показывали первые и вторые часы в момент первого удара боя? Продолжительность одного сигнала мала и ее можно не учитывать, качество сигнала у обоих часов одинаковое.

5. Для всех целых $k<0$ найти целые решения x и y системы $\begin{cases} x^2+xy^2-ky^2=0 \\ x^2-xy+ky^2=0 \end{cases}$.

6. Волк окружен собаками, расположенными в точках M, N, P и Q на сторонах квадрата $ABCD$, $M\in[A;B], N\in[B;C], P\in[C;D], Q\in[D;A]$ так, что $AM:MB=BN:NC=CP:PD=DQ:QA=1:3$. Волк, находящийся внутри квадрата в точке пересечения прямых MP и NQ, может бежать со скоростью v_w по прямой в любом направлении. Собаки бегают только по сторонам квадрата со скоростью, не превосходящей v_c. Волк может вырваться из окружения, если на границе квадрата встретит не более одной собаки. При каких значениях отношения v_c/v_w волк имеет шанс спастись?

Ответы и решения

Задача 1 Ответ: $(x-2y)_{\max}=\dfrac{25}{6}$

Решение

Если $\varphi\in[0;2\pi]$, то числа $x=\dfrac{5}{2}\cos\varphi$ и $y=\dfrac{5}{3}\sin\varphi$ удовлетворяют уравнению. Тогда

$$x-2y=\frac{5}{2}\cos\varphi-\frac{10}{3}\sin\varphi=\frac{5}{6}(3\cos\varphi-4\sin\varphi)=\frac{25}{6}\left(\frac{3}{5}\cos\varphi-\frac{4}{5}\sin\varphi\right)=,$$

$$=\frac{25}{6}(\cos\theta\cos\varphi-\sin\theta\sin\varphi)=\frac{25}{6}\cos(\varphi+\theta)$$

где $\theta = \arccos\frac{3}{5}$. Поскольку наибольшим возможным значением $\cos(\varphi+\theta)$, $\varphi \in [0;2\pi]$ является 1, то $(x-2y)_{\max} = \frac{25}{6}$.

Задача 2. Ответ: $\begin{cases} x = \frac{5\pi}{2}(5-4t) \\ y = 12\pi(t-1) \end{cases}, t \in Z$

Решение.

Поскольку $|2\sin(x+y)+3| \le 5,\ |\cos(2x-y)-1| \le 2$, равенство возможно только при

$$\begin{cases} \sin(x+y)=1 \\ \cos(2x-y)=-1 \end{cases} \to \begin{cases} x+y=\frac{\pi}{2}+2\pi m, \\ 2x-y=\pi+2\pi n \end{cases} \to \begin{cases} x=\frac{\pi}{2}+\frac{2\pi}{3}(m+n) \\ y=\frac{2\pi}{3}(2m-n) \end{cases},\ m,n \in Z\ .$$

Подставляя найденные x и y в уравнение прямой, получим

$$3\pi + 4\pi(m+n) + \frac{10\pi}{3}(2m-n) = 15\pi \to 32m+2n=36 \to \begin{cases} m=t \\ n=18-16t \end{cases}, t \in Z\ .$$

Тогда $\begin{cases} x = \frac{5\pi}{2}(5-4t) \\ y = 12\pi(t-1) \end{cases}, t \in Z$.

Задача 3 Ответ: 1) $k_n^2 = C_{n+1}^2 = \frac{n(n+1)}{2}$, $k_n^3 = C_{n+2}^3 = \frac{n(n+1)(n+2)}{6}$ 2) $n = 10$

Решение

1) Обозначим через k_n^m число неотрицательных решений уравнения $x_1 + x_2 + \ldots + x_n = m$.

Для $m = 2$ число решений , для которых $x_i = 2$, а $x_j = 0,\ j \ne i$ равно $C_n^1 = n$. Число решений, для которых $x_i = 1,\ x_j = 1,\ x_k = 0,\ k \ne i, j$, равно $C_n^2 = \frac{n(n-1)}{2}$. Тогда $k_n^2 = n + \frac{n(n-1)}{2} = \frac{n(n+1)}{2} = C_{n+1}^2$.

Для $m = 3$ число решений, для которых $x_i = 3$, а $x_j = 0,\ j \ne i$ равно $C_n^1 = n$. Число решений, для которых $x_i = 2,\ x_j = 1,\ x_k = 0,\ k \ne i, j$, равно $A_n^2 = 2!C_n^2 = n(n-1)$. Число решений, для которых $x_i = 1,\ x_j = 1,\ x_k = 1,\ x_r = 0,\ r \ne i, j, k$, равно $C_n^3 = \frac{n(n-1)(n-2)}{6}$. Тогда

$$k_n^3 = C_n^1 + 2C_n^2 + C_n^3 = n + n(n-1) + \frac{n(n-1)(n-2)}{6} = n + \frac{n(n-1)(n+4)}{6} =$$
$$= \frac{n}{6}(n^2+3n+2) = \frac{n(n+1)(n+2)}{6} = C_{n+2}^3 .$$

2) Условие $k_n^3 = 4k_n^2$ приводит к равенству $\frac{n(n+1)(n+2)}{6} = 4 \cdot \frac{n(n+1)}{2} \to n+2=12 \to n=10$

Задача 4 Ответ: На первых часах 9 часов, на вторых – 7 часов.

Решение

$t_1,\ t_2$ – время на первых и вторых часах. $L = 3\cdot(t_1-1) = 4\cdot(t_2-1)$ – время от первого до последнего удара часов. $t_1 = 4k+1, t_2 = 3k+1, L = 12k, k \in Z$. Количество совпадающих сигналов, включая первый и последний, равно $k+1$. Общее число сигналов, услышанных Петей, равно $t_1 + t_2 - k - 1 = 6k+1 = 13 \to k = 2 \to t_1 = 9, t_2 = 7$.

Задача 5 Ответ:

Для $k=-l(l+1),\ l\in Z,\ l\neq 0,-1$ $\begin{cases} x_1=-l(2l+1), \\ y_1=2l+1 \end{cases}$, $\begin{cases} x_2=-(l+1)(2l+1), \\ y_2=-2l-1 \end{cases}$, $\begin{cases} x_3=0, \\ y_3=0 \end{cases}$.

Для остальных $k<0,\ k\in Z$ только нулевое решение.

Решение

Складываем и вычитаем уравнения

$\begin{cases} x(2x+y(y-1))=0 \\ y(x(y+1)-2ky)=0 \end{cases} \to 1)\, x=0 \to y=0, \forall\ k<0\ \ 2)\ y=0 \to x=0, \forall\ k<0$

$3)\ x\neq 0,\ \ y\neq 0 \to \begin{cases} x(y+1)=2ky \\ 2x=-y(y-1) \end{cases} \to \begin{cases} y^2=1-4k \\ x=-\dfrac{y(y-1)}{2} \end{cases}$

С учетом целочисленности y имеем: $1-4k=m^2,\ m\in Z \to k=\dfrac{(1-m)(1+m)}{4}<0 \to |m|>1$.

Целочисленность k достигается только при нечетном m, т.е. $m=2l+1,\ l\neq 0,-1,\ l\in Z$.

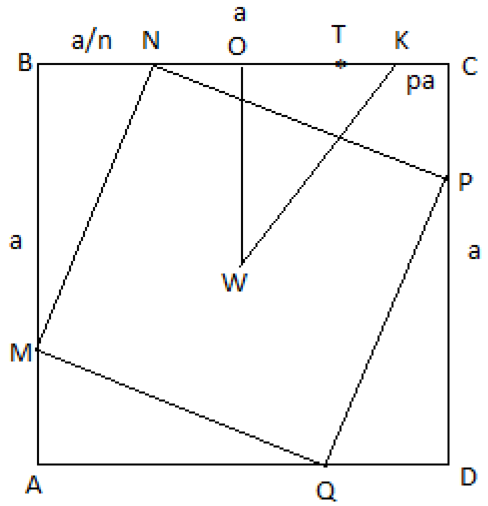
При $k=-l(l+1),\ l\neq 0,-1,\ l\in Z$, помимо $x=0,\ y=0$, система имеет решения:

$$\begin{cases} y_1=m=2l+1, \\ x_1=-l(2l+1) \end{cases} \text{ и } \begin{cases} y_2=-m=-2l-1 \\ x_2=-(l+1)(2l+1) \end{cases}$$

При $k<0,\ k\in Z,\ k\neq -l(l+1),\ \forall\, l\in Z$ имеется только нулевое решение.

Задача 6 Ответ: $v_c/v_w<\dfrac{3\sqrt{2}}{\sqrt{5}}\approx 1,89$

Решение.



Пусть $AM:MB=BN:NC=CP:PD=DQ:QA=1:n$, a – сторона квадрата $ABCD$, волк находится в точке W - центре квадрата $MNPQ$. Точка T на стороне BC определена условием $NT=TC+CP=a/2$, $TC=\dfrac{n-2}{2n}a$, K – точка выхода волка на границу квадрата, $KC=p\cdot a$, p – параметр.

Случай 1. $K\in[T;C]\to p\in\left[0;\dfrac{n-2}{2n}\right]$

$WK=\dfrac{a}{\sqrt{2}}\sqrt{1-2p+2p^2},\ NK=\dfrac{a(n-1-pn)}{n}\geq\dfrac{a}{2}$

$t_w=\dfrac{a\sqrt{1-2p+2p^2}}{v_w\sqrt{2}}$ – время попадания волка в точку K,

$t_c = \dfrac{a(n-1-pn)}{nv_c}$ – время появления двух собак в точке K .

$t_w < t_c$ – условие спасения волка. $\dfrac{t_c}{t_w} > 1 \to \varphi_1(p) = \dfrac{t_c}{t_w} = \dfrac{v_w\sqrt{2}}{nv_c} \cdot \dfrac{n-1-pn}{\sqrt{1-2p+2p^2}} > 1$.

Функция монотонно убывает при $p \in \left[0; \dfrac{n-2}{2n}\right]$ (проверяется дифференцированием), поэтому максимум $\varphi(p)$ на отрезке достигается в точке $p = 0$.

Если $\varphi_1(0) = \dfrac{v_w(n-1)\sqrt{2}}{nv_c} > 1$, то прорыв волка на границе $[K;C]$ возможен при $\dfrac{v_c}{v_w} < \dfrac{(n-1)\sqrt{2}}{n}$.

Случай 2. $K \in [N;T]$, $p \in \left[\dfrac{n-2}{2n}; \dfrac{n-1}{n}\right]$

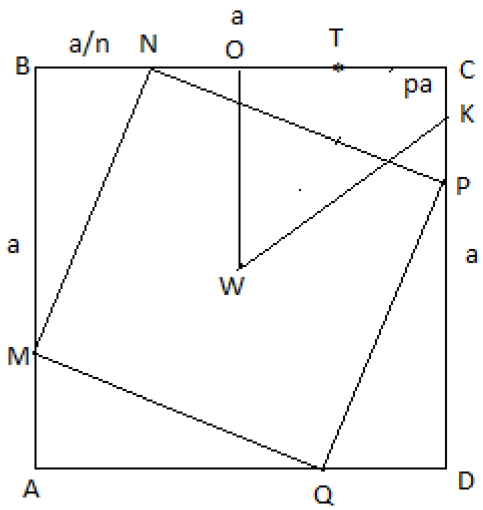
$t_c = (pa + \dfrac{a}{n}) / v_c = \dfrac{a(pn+1)}{nv_c}$ – время появления в точке K двух собак,

$t_w = \dfrac{a\sqrt{1-2p+2p^2}}{v_w\sqrt{2}}$ – время появления волка в точке K .

$\dfrac{t_c}{t_w} > 1 \to \varphi_2(p) = \dfrac{t_c}{t_w} = \dfrac{v_w\sqrt{2}}{nv_c} \cdot \dfrac{pn+1}{\sqrt{1-2p+2p^2}} > 1$.

Функция $\varphi_2(p)$ возрастает при $p \in \left[\dfrac{n-2}{2n}; \dfrac{n-1}{n}\right]$, поэтому при ее максимум достигается на правом конце отрезка: если $\varphi_2\left(\dfrac{n-1}{n}\right) = \dfrac{v_w n\sqrt{2}}{v_c\sqrt{n^2-2n+2}} > 1$, то прорыв волка на отрезке $[N;T]$ границы возможен. т.е. если $\dfrac{v_c}{v_w} < \dfrac{n\sqrt{2}}{\sqrt{n^2-2n+2}}$ волк может спастись через участок границы $[N;T]$

Случай 3. Участок границы $[C;P]$



$CK = p \cdot a$, $p \in \left[0; \dfrac{1}{n}\right]$, $t_c = (\dfrac{n-1}{n}a + pa) : v_c = \dfrac{a(pn+n-1)}{nv_c}$, $t_w = \dfrac{a\sqrt{2p^2-2p+1}}{v_w\sqrt{2}}$

$\dfrac{t_c}{t_w} > 1 \to \varphi_3(p) = \dfrac{t_c}{t_w} = \dfrac{v_w\sqrt{2}}{nv_c} \cdot \dfrac{n-1+pn}{\sqrt{1-2p+2p^2}} > 1$ хотя бы в одной точке $p \in \left[0; \dfrac{1}{n}\right]$.

Функция $\varphi_3(p)$ возрастает на отрезке $p \in \left[0; \frac{1}{n}\right], n \geq 2$, поэтому если $\varphi_3\left(\frac{1}{n}\right) = \frac{n v_w \sqrt{2}}{v_c \sqrt{n^2 - 2n + 2}} > 1$,то волк может покинуть квадрат через отрезок $[C;P]$ границы квадрата, т.е. $\frac{v_c}{v_w} < \frac{n\sqrt{2}}{\sqrt{n^2 - 2n + 2}}$.

В варианте 1 $n = 3$, случай 1 дает условие $\frac{v_c}{v_w} < \frac{2\sqrt{2}}{3} \approx 0,94$, случаи 2 и 3 приводят к неравенству $\frac{v_c}{v_w} < \frac{3\sqrt{2}}{\sqrt{5}} \approx 1,89$, поэтому волк имеет шанс покинуть квадрат, если $\frac{v_c}{v_w} < \frac{3\sqrt{2}}{\sqrt{5}} \approx 1,89$

2.8. Заключительный тур олимпиады «Росатом», 11 класс (Саров, Киров, Тамбов, Санкт-Петербург)

1. Найти целые решения x и y уравнения $27\cdot 4^x - 30\cdot 2^x\cdot 3^y + 8\cdot 9^y = 0$.
2. Найти все пары чисел $(x;y)$ в квадрате $0\le x\le \pi,\ -\pi\le y\le 0$,

удовлетворяющие системе $\begin{cases}\sin^3 x - 4\sin^2 x\cos y + 5\sin x\cos^2 y - 2\cos^3 y = 0\\ 2\sin^2 x - \cos y = 0\end{cases}$.

3. Найти многочлен $P(x)$ степени 3, удовлетворяющий тождеству $P(x+2)-2P(x+1)+P(x)\equiv x$ по переменной x, делящийся на $x-1$ без остатка, для которого $P(2)=1$.
4. Найдите целые числа $x>0,\ y>0$, для которых $(x-y)^2+3x-2y=23$.
5. При каких значениях a система $\begin{cases}\left|x-a+3\right|+\left|y-a\right|=1\\ \left|x+a^2-1\right|+\left|y-a^2\right|=1\end{cases}$ имеет ровно два решения?
6. Заяц оказался загнанным двумя собаками в круг радиуса 40 и находится в точке A , отстоящей от центра круга O на расстояние 20 . Собаки находятся на концах диаметра круга, проходящего через точки A и O . Они могут преследовать зайца только по границе круга со скоростью, не превосходящей V_d . Заяц может убегать от собак по прямой с постоянной скоростью V_h . Он спасется , если сумеет выбежать из круга, не встретив на своем пути собаку. При каких значениях отношения $V_h : V_d$ у зайца есть шанс спастись?

Ответы и решения

Задача 1 Ответ: 1) $x=1,\ y=1$ 2) $x=2,\ y=2$

Решение. Замена $u=2^x,\quad v=3^y \to 27u^2-30uv+8v^2=0$. Замена

$$t=\frac{u}{v}\to 27t^2-30t+8=0\to \left[\begin{array}{l} t=2/3\\ t=4/9\end{array}\right. .$$

Пусть $\dfrac{2^x}{3^y}=\dfrac{2}{3}\to 2^{x-1}=3^{y-1}$. Если $x>1,\quad y>1$, то целых решений нет, поскольку, например, правая часть равенства делится на 3, а левая – нет. Аналогично, если $x<1,\ \ y<1$, то $2^{1-x}=3^{1-y}$ содержит целые, положительные показатели степеней и равенство невозможно. Если $x>1,\ \ y<1$ или $x<1,\ \ y>1$, то равенство невозможно, поскольку одна из частей равенства больше единицы, а другая – меньше. Таких образом, остается вариант $x=1,\ \ y=1$, который является целым решением.

Пусть $\dfrac{2^x}{3^y}=\dfrac{4}{9}\to 2^{x-2}=3^{y-2}$. Аналогично доказывается, что единственным целым решением являются $x=2,\ \ y=2$.

Задача 2 Ответ:

$$\left(0;-\frac{\pi}{2}\right),\left(\pi;-\frac{\pi}{2}\right),\ \left(\arcsin\frac{1}{4};-\arccos\frac{1}{8}\right),\left(\pi-\arcsin\frac{1}{4};-\arccos\frac{1}{8}\right),\left(\frac{\pi}{6};-\frac{\pi}{3}\right),\left(\frac{5\pi}{6};-\frac{\pi}{3}\right)$$

Решение

Если $\cos y=0$, то из первого уравнения $\sin x=0$ и второе уравнение системы выполняется:

$\begin{cases} x=\pi m\\ y=\pi/2+\pi k,\end{cases}\quad k,m\in Z$. В квадрате это дает решения: $(0;-\pi/2),\ (\pi;-\pi/2)$

Если $\cos y \neq 0$, то $\sin x \neq 0$ и деление первого уравнения на $\cos^3 y$ с заменой $u = \dfrac{\sin x}{\cos y}$ приводят у кубическому уравнению: $u^3 - 4u^2 + 5u - 2 = 0$. Его корни $u_1 = u_2 = 1$ и $u_3 = 2$.

Первый корень приводит к системе: $\begin{cases} \sin x = \cos y, \\ 2\sin^2 x = \cos y \end{cases}$ и ее решениям $\begin{cases} \sin x = 1/2 \\ \cos y = 1/2 \end{cases}$.

В квадрате им соответствуют пары $\left(\dfrac{\pi}{6}; -\dfrac{\pi}{3}\right)$ и $\left(\dfrac{5\pi}{6}; -\dfrac{\pi}{3}\right)$.

Второй корень приводит к системе $\begin{cases} \sin x = 2\cos y \\ 2\sin^2 x = \cos y \end{cases}$ и ее решениям $\begin{cases} \sin x = 1/4 \\ \cos y = 1/8 \end{cases}$.

В квадрате им соответствуют пары $\left(\arcsin\dfrac{1}{4}; -\arccos\dfrac{1}{8}\right), \left(\pi - \arcsin\dfrac{1}{4}; -\arccos\dfrac{1}{8}\right)$.

Задача 3 Ответ: $P(x) = \dfrac{1}{6}(x-1)\left(x^2 - 2x + 6\right)$

Решение

Пусть n - степень многочлена $P(x)$. Докажем, что $n \le 3$. Замена $t = x+1$. Тогда тождество примет вид: $P(t+1) + P(t-1) - 2P(t) = t - 1$.

Пусть $P(t) = a_n t^n + a_{n-1}t^{n-1} + a_{n-2}t^{n-2} + \ldots + a_1 t + a_0$. Тогда

$P(t+1) + P(t-1) - 2P(t) = a_n\left((t+1)^n + (t-1)^n - 2t^n\right) + a_{n-1}\left((t+1)^{n-1} + (t-1)^{n-1} - 2t^{n-1}\right) + \ldots + 2a_0.$

Максимальная степень t в первой скобке равна $n-2$ с коэффициентом $n(n-1)$, во второй скобке $n-3$ с коэффициентом $(n-1)(n-2)$ и т.д. Если $n-2 > 1$, тождество по t невозможно, поэтому $n \le 3$.

Случай 1. $n = 3$

$P(t+1) + P(t-1) - 2P(t) = a_3\left((t+1)^3 + (t-1)^3 - 2t^3\right) + 2a_2 = 6a_3 t + 2a_2 \equiv t - 1$

$\to a_3 = \dfrac{1}{6},\ a_2 = -\dfrac{1}{2}$

при этом коэффициенты a_1, a_0 – произвольные : $P(t) = \dfrac{1}{6}t^3 - \dfrac{1}{2}t^2 + a_1 t + a_0$.

Условие деления $P(x)$ на $x-1$ и $P(2) = 1$ равносильно системе:

$\begin{cases} P(\mathrm{t}) = a_1 + a_0 = 1/3 \\ P(2) = 2a_1 + a_0 - 2/3 = 1 \end{cases} \to a_1 = \dfrac{4}{3},\ a_0 = -1$

$P(x) = \dfrac{1}{6}x^3 - \dfrac{1}{2}x^2 + \dfrac{4}{3}x - 1 = \dfrac{1}{6}\left(x^3 - 3x^2 + 8x - 6\right) = \dfrac{1}{6}(x-1)(x^2 - 2x + 6)$

Случай 2. $n = 2$

$P(t+1) + P(t-1) - 2P(t) = 2a_2 \equiv t - 1$, что невозможно.

Случай 3. $n = 1$

$P(t+1) + P(t-1) - 2P(t) = 0 \equiv t - 1$, что невозможно.

Задача 4 Ответ: 9 пар, $\begin{cases} x = 23 - 3t - t^2 \\ y = 23 - 2t - t^2 \end{cases},\ t = -5, -4, \ldots, 3$

Решение

Обозначим через $t = x - y$. Тогда

$(x-y)^2 + 2(x-y) + x = 23 \to x = 23 - 2t - t^2 \to y = x - t = 23 - 3t - t^2,\ t \in Z$.

Положительность x, y обеспечивают неравенства

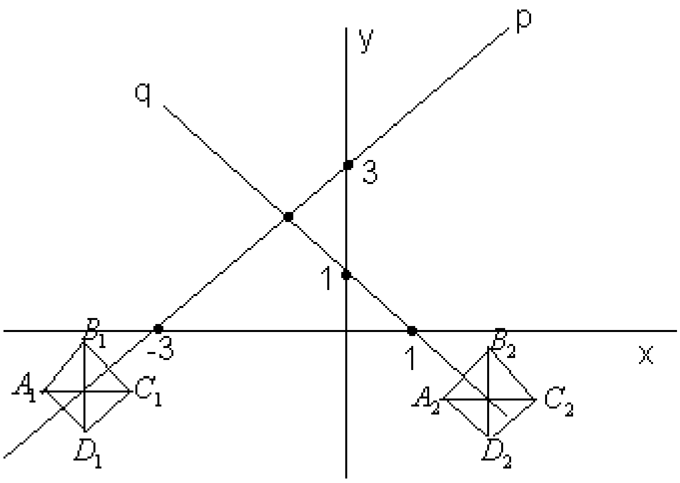
$$\begin{cases} t^2 + 3t - 23 < 0 \to t = -5, -4, \dots, 3 \\ t^2 + 2t - 23 < 0 \to t = -6, -5, -4, \dots, 3 \end{cases} \to t = -5, -4, \dots, 3$$

Задача 5 Ответ: $a \in \left(1; \sqrt{2}\right) \cup \left(\sqrt{2}; \sqrt{3}\right)$

Решение.

Выясним, при каких значениях a и b система $\begin{cases} |x - a + 3| + |y - a| = 1 \\ |x + b - 1| + |y - b| = 1 \end{cases}$ имеет решения.

Фазовым портретом первого уравнения системы является квадрат со сторонами $\sqrt{2}$, параллельными биссектрисам координатных углов, центры которых имеют координаты: $\begin{cases} x = a - 3 \\ y = a \end{cases}$. При изменении параметра a центры квадратов двигаются по прямой (p) с уравнением $y = x + 3$. Второе уравнение системы описывает аналогичные квадраты с центрами $\begin{cases} x = 1 - b \\ y = b \end{cases}$, расположенные на прямой (q) с уравнением: $y = 1 - x$.



При каких a и b квадраты имеют общие точки?

Координаты вершин первого квадрата: $A_1(a - 4; a)$, $B_1(a - 3; a + 1)$, $C_1(a - 2; a)$, $D_1(a - 3; a - 1)$

Условие принадлежности вершины A_1 второму квадрату: $|a - 5 + b| + |a - b| \le 1$

$$\to \begin{cases} 2 \le a \le 3 \\ 2 \le b \le 3 \end{cases} \quad (a)$$

Условия принадлежности вершины B_1 второму квадрату: $|a + b - 4| + |a - b + 1| \le 1$

$$\to \begin{cases} 1 \le a \le 2 \\ 2 \le b \le 3 \end{cases} \quad (b)$$

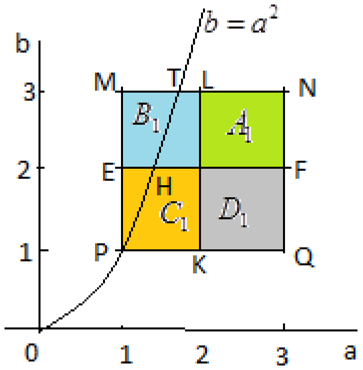
Условия принадлежности вершины C_1 второму квадрату: $|a - 3 + b| + |a - b| \le 1$

$$\to \begin{cases} 1 \le a \le 2 \\ 1 \le b \le 2 \end{cases} \quad (c)$$

Условия принадлежности вершины D_1 второму квадрату: $|a - 4 + b| + |a - 1 - b| \le 1$

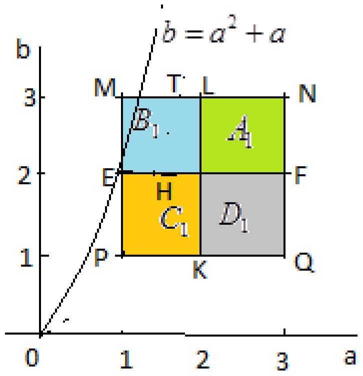
$$\to \begin{cases} 2 \le a \le 3 \\ 1 \le b \le 2 \end{cases} \quad (d)$$

Объединение условий $(a)-(d)$ на плоскости $(a;b)$ изображено на рис. в виде квадрата $PMNQ$



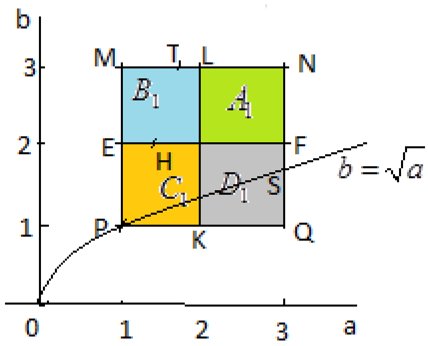
Внутренние точки четырех квадратов $(a)-(d)$ соответствуют двум решениям системы.
Объединение отрезков EF и KL соответствуют значениям параметров a и b, при которых система имеет бесконечное число решений. Граница квадрата $PMNQ$ соответствует единственному решению системы, кроме точек E, F, K, L. Внешние точки квадрата $PMNQ$ соответствуют отсутствию у системы решений.
В варианте 1 $b=a^2$ и парабола (см. рис.) содержит внутренние точки квадратов b и c (два решения) с абсциссами $a \in (1;\sqrt{2}) \cup (\sqrt{2};\sqrt{3})$.

В варианте 2 $b=a^2+a$,



Вариант 2

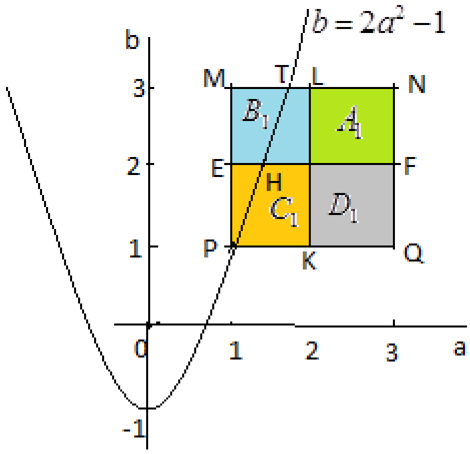
Бесконечное число решений соответствует точке E на параболе $b=a^2+a$.
В варианте 3 $b=\sqrt{a}$



Вариант 3

Единственному решению соответствуют на параболе $b=\sqrt{a}$ точка P с абсциссой $a=1$ и точка S с абсциссой $a=3$.

В варианте 4 $b=2a^2-1$

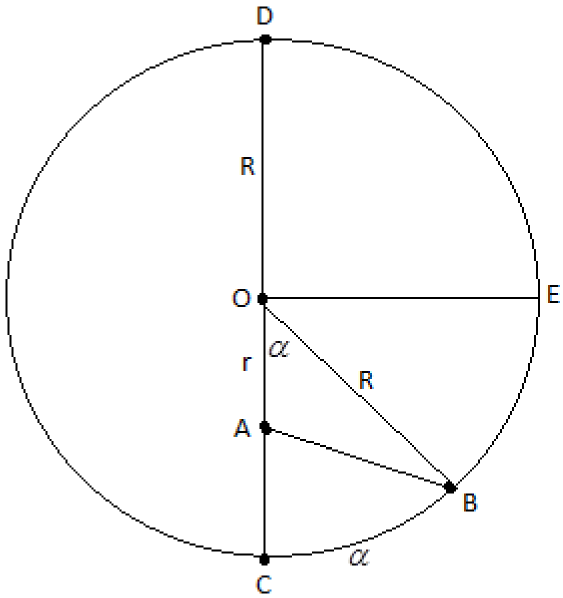


Вариант 4

Отсутствие решений системы соответствует абсциссам точек параболы $b = 2a^2 - 1$ не принадлежащим квадрату $PMNQ$. Граничная точка T имеет абсциссу $a = \sqrt{2}$.

Задача 6 Ответ: $V_h : V_d > \dfrac{\sqrt{5}}{\pi} \approx 0{,}71$

Решение



Ближайшая собака в точке C, $R = 40,\ r = 20$, AB – путь спасения, α – параметр пути, $\alpha \in \left(0; \dfrac{\pi}{2}\right]$. $t_A = \dfrac{AB}{V_h} = \dfrac{\sqrt{R^2 + r^2 - 2Rr\cos\alpha}}{V_h}$ – время выхода зайца на границу.

$t_c = \dfrac{\alpha R}{V_d}$ – минимальное время выхода собаки C в точку B. Условие спасения:

$t_A < t_c \to V_h : V_d > \dfrac{\sqrt{R^2 + r^2 - 2Rr\cos\alpha}}{\alpha R}$. Исследуем на монотонность функцию

$f(\alpha) = \dfrac{\sqrt{R^2 + r^2 - 2Rr\cos\alpha}}{\alpha R}$, $\alpha \in \left(0; \dfrac{\pi}{2}\right]$.

Для простоты исследуем функцию $F(\alpha) = f^2(a) = \dfrac{R^2 + r^2 - 2Rr\cos\alpha}{\alpha^2 R^2}$ на том же отрезке.

Докажем, что $F'(\alpha) = \dfrac{2\alpha^2 Rr\sin\alpha - 2\alpha(R^2 + r^2 - 2Rr\cos\alpha)}{R^2\alpha^4} < 0$ для всех $\alpha \in \left(0; \dfrac{\pi}{2}\right]$.

Это выполнено, если $\alpha\sin\alpha + 2\cos\alpha < \dfrac{R^2 + r^2}{Rr}$ для всех $\alpha \in \left(0; \dfrac{\pi}{2}\right]$. Заметим, что правая часть неравенства $\dfrac{R^2 + r^2}{Rr} > 2$ для любых $r < R$.

Рассмотрим функцию $\varphi(\alpha) = \alpha\sin\alpha + 2\cos\alpha$ при $\alpha \in \left(0; \dfrac{\pi}{2}\right]$. Ее производная отрицательна, поскольку $\varphi'(\alpha) = \alpha\cos\alpha - \sin\alpha = \cos\alpha\left(\alpha - tg\alpha\right) < 0$, поскольку $tg\alpha \ge \alpha$ при любых $\alpha \in \left(0; \dfrac{\pi}{2}\right]$ (равенство только при $\alpha = 0$. Тогда $\max\varphi(\alpha) = \varphi(0) = 2$ и функция $F(\alpha)$, а значит и $f(a)$, монотонно убывают. Таким образом, $\min f(\alpha) = f\left(\dfrac{\pi}{2}\right) = \dfrac{2\sqrt{R^2 + r^2}}{\pi R}$ и заяц может быть спасен, если $V_h : V_d > \dfrac{2\sqrt{R^2 + r^2}}{\pi R} = \dfrac{\sqrt{5}}{\pi} \approx 0,71$.

2.9. Заключительный тур олимпиады «Росатом», 11 класс (Сергиев Посад, Обнинск)

1. При каких y выражение $\dfrac{\log_{4y}(y/2)}{\log_2 y+2}$ принимает наибольшее возможное значение? Найти это значение.

2. Найти все значения x, при которых найдется число a, для которого

$$\cos a-\cos 2a=\frac{16x^2-75x+5}{16(x^2-4)}.$$

3. Найти все целые x, для которых число $7x+2$ является квадратом целого числа.

4. Известно, что для любого n сумма квадратов первых n натуральных чисел $1^2+2^2+3^2+\ldots+n^2$ является значением многочлена $P_3(n)$ третьей степени. Найти его коэффициенты и сумму квадратов 25 первых членов арифметической прогрессии a_m с первым членом $a_1=-2$ и разностью $d=3$.

5. При каждом значении $\alpha\in[\pi/2;\pi]$ решить систему

$$\begin{cases}(x-|x|)\cos\alpha+(y-|y|)\sin\alpha=2\sqrt{3}\\ x\sin\alpha-y\cos\alpha=1\end{cases}.$$

6. Две окружности K_1 и K_2 с радиусами 1 и 2 расположены на сфере радиуса 5 и касаются друг друга. Третья окружность K также находится на сфере и касается окружностей K_1 и K_2 в различных точках. Найти наибольшее возможное значение радиуса окружности K.

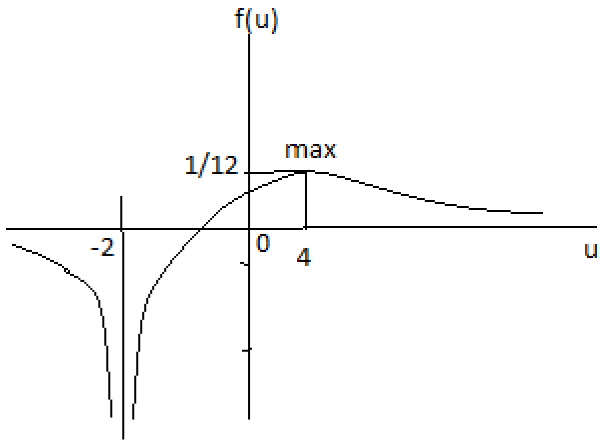
Ответы и решения

Задача 1. Ответ: 1) $y=16$ 2) $f_{\max}=\dfrac{1}{12}$

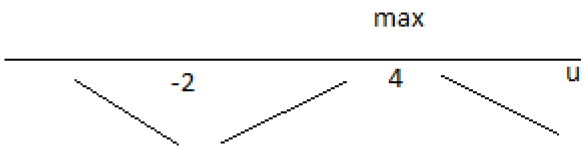
Решение

Перейдем к логарифмам при основании x (в варианте 1 $x=2$) : $\dfrac{\log_x y-1}{(\log_x y+2)^2}$, $x>0,\ x\neq 1,\ y>0$.

Замена переменной $u=\log_x y\to f(u)=\dfrac{u-1}{(u+2)^2}$. На рис. изображен график функции $f(u)$:



Для нахождения точек экстремума вычислим производную:



$f'(u)=\dfrac{4-u}{(u+2)^2}$.

$f(4)=\dfrac{1}{12}$. Выражение принимает наибольшее значение $\dfrac{1}{12}$ для допустимых (x,y) , при которых $\log_x y=4 \to y=x^4=16$.

Задача 2 Ответ: $x\in\left(-\infty;-\dfrac{77}{2}\right]\cup[-1;1]\cup\left[\dfrac{123}{4};+\infty\right)$

Решение

Найдем множество значений функции $f(a)=\cos a-\cos 2a=1+\cos a-2\cos^2 a$.

Замена $t=\cos a\in[-1;1]$ приводит к квадратному трехчлену $\tilde f(t)=1+t-2t^2$. Необходимо найти множество его значений на отрезке $[-1;1]$. Наибольшее значение – в вершине при $x=\dfrac{1}{4}$:

$\tilde f\left(\dfrac{1}{4}\right)=\dfrac{9}{8}$. Наименьшее значение достигается при $t=-1$ и равно $\tilde f(-1)=-2$. Искомые значения x находятся из решения неравенства: $-2\le\dfrac{16x^2-75x+5}{16(x^2-4)}\le\dfrac{9}{8}$.

Преобразованием приходим системе двух неравенств:

(A) $\dfrac{2x^2+75x-77}{x^2-4}\ge 0$ и (B) $\dfrac{48x^2-75x-123}{x^2-4}\ge 0$.

Неравенство (A) $\dfrac{(x-1)(2x+77)}{(x-2)(x+2)}\ge 0$ имеет решения $x\in\left(-\infty;-\dfrac{77}{2}\right]\cup(-2;1]\cup(2;+\infty)$.

Неравенство (B) $\dfrac{(x+1)(48x-123)}{(x-2)(x+2)}\ge 0$ имеет решения $x\in(-\infty;-2)\cup[-1;2)\in\left[\dfrac{123}{48};+\infty\right)$.

Пересечение этих множеств даст ответ: $x\in\left(-\infty;-\dfrac{77}{2}\right]\cup[-1;1]\cup\left[\dfrac{123}{48};+\infty\right)$.

Задача 3. Ответ:

1) $x=7n^2+6n+1,\ n\in Z$

2) $x=7n^2+8n+2$

Решение

$7x+2=y^2 \to 7x=y^2-2$, т.е. число y^2-2 должно делится на 7.

Случай 1. $y=7n,\ n\in Z$. тогда $7x=49n^2-2$. Таких целых x не бывает, поскольку правая часть равенства на 7 не делится. К аналогичному результату приводит $y=7n+1,\ y=7n+2,\ y=7n+5,\ y=7n+6,\ n\in Z$.

Случай 2. $y=7n+3\to 7x=49n^2+42n+7\to x=7n^2+6n+1,\ n\in Z$.

Случай 3. $y=7n+4\to 7x=49n^2+56n+14\to x=7n^2+8n+2,\ n\in Z$.

Задача 4

Ответ:

1) $P_3(n) = \frac{1}{3}n^3 + \frac{1}{2}n^2 + \frac{1}{6}n = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$

2) $S(n) = n\left(a_1^2 + (n-1)a_1 d + \frac{(n-1)(2n-1)}{6}d^2\right) = 1552$

в варианте $n = 25,\ a_1 = -2,\ d = 3$

Решение:

$A.\quad S_n = 1^2 + 2^2 + 3^2 + \ldots + n^2 = an^3 + bn^2 + cn + d$

$S_{n+1} = a(n+1)^3 + b(n+1)^2 + c(n+1) + d$

$S_{n+1} - S_n = (n+1)^2 = a((n+1)^2 + n(n+1) + n^2) + b(2n+1) + c =$

$= 3an^2 + (3a + 2b + 1)n + (a + b + c) \to$

$$\begin{cases} 3a = 1 \to a = \frac{1}{3} \\ 3a + 2b = 2 \\ a + b + c = 1 \to c = \frac{1}{6} \end{cases} \to b = \frac{1}{2}; \to P(n) = \frac{1}{3}n^3 + \frac{1}{2}n^2 + \frac{1}{6}n + d$$

$P(1) = 1 = \frac{1}{3} + \frac{1}{2} + \frac{1}{6} + d \to d = 0$

1) $P(n) = \frac{1}{3}n^3 + \frac{1}{2}n^2 + \frac{1}{6}n = \frac{n\left(2n^2 + 3n + 1\right)}{6} = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$

Б.

$$\sum_{m=1}^{n} a_m^2 = \sum_{m=1}^{n}\left(a_1 + (m-1)d\right)^2 = \sum_{m=1}^{n} a_1^2 + 2a_1 d\sum_{m=1}^{n}(m-1) + d^2\sum_{m=1}^{n}(m-1)^2 =$$

$$= na_1^2 + a_1 dn(n-1) + S_{n-1} = na_1^2 + a_1 dn(n-1) + \frac{d^2 n(n-1)(2n-1)}{6} =$$

$$= n\left(\frac{d^2}{3}n^2 + \left(a_1 d - \frac{d^2}{2}\right)n + \frac{d^2}{6} - a_1 d + a_1^2\right)$$

Задача 5

Ответ: 1) для $\alpha = \frac{\pi}{2}$ решений нет

2) при $\alpha \in \left(\frac{\pi}{2}; \pi\right]$ единственное решение $x = \frac{\sqrt{3}}{\cos\alpha},\ y = \frac{\sqrt{3}tg\,\alpha - 1}{\cos\alpha}$.

Решение

Случай 1. $\alpha = \frac{\pi}{2}$. Тогда система примет вид : $\begin{cases} y - |y| = 2\sqrt{3} \\ x = 1 \end{cases} \to \begin{cases} y = \sqrt{3},\ y \le 0 \\ x = 1 \end{cases} \to$ решений нет

Случай 2. $\alpha = \pi$. Тогда система примет вид: $\begin{cases} x - |x| = -2\sqrt{3} \\ y = 1 \end{cases} \to \begin{cases} x = -\sqrt{3} \\ y = 1 \end{cases}$.

Случай 3. $\alpha \in \left(\frac{\pi}{2}; \pi\right)$

3.a. $x \ge 0,\ y \ge 0$ решений нет, поскольку первое уравнение системы не имеет решений.

3.б. $x < 0,\ y \geq 0$. Система примет вид $\begin{cases} 2x\cos\alpha = 2\sqrt{3} \\ x\sin\alpha - y\cos\alpha = 1 \end{cases} \to \begin{cases} x = \dfrac{\sqrt{3}}{\cos\alpha} < 0 \\ y = \dfrac{\sqrt{3}tg\alpha - 1}{\cos\alpha} > 0 \end{cases}$ для $\alpha \in \left(\dfrac{\pi}{2};\pi\right)$.

3.в. $x < 0,\ y < 0$. Система примет вид:

$$\begin{cases} x\cos\alpha + y\sin\alpha = \sqrt{3} \\ x\sin\alpha - y\cos\alpha = 1 \end{cases} \to \begin{cases} x = \sqrt{3}\cos\alpha + \sin\alpha < 0 \to tg\alpha > -\sqrt{3} \\ y = \sqrt{3}\sin\alpha - \cos\alpha < 0 \to tg\alpha > 1/\sqrt{3} \end{cases}$$

С учетом того, что $\alpha \in \left(\dfrac{\pi}{2};\pi\right)$ и $tg\alpha < 0$ такое решение не реализуется.

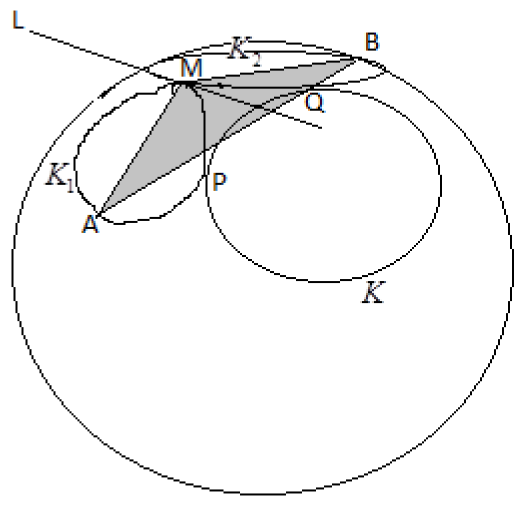
4.г. $x > 0,\ y < 0$. Тогда система примет вид: $\begin{cases} 2y\sin\alpha = 2\sqrt{3} \\ x\sin\alpha - y\cos\alpha = 1 \end{cases} \to \begin{cases} y = \dfrac{\sqrt{3}}{\sin\alpha} < 0 \\ x = \dfrac{\sqrt{3}ctg\alpha + 1}{\sin\alpha} > 0 \end{cases}$.

Такое решение не реализуется, поскольку $\sin\alpha > 0$ для $\alpha \in \left(\dfrac{\pi}{2};\pi\right)$.

Задача 6 Ответ : $r_{\max} = \dfrac{\sqrt{117 + 24\sqrt{14}}}{5} \approx 2,87$

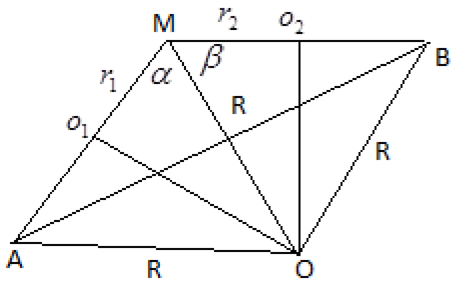
Решение

На рис. изображены окружности K_1 и K_2 на сфере, M – точка их касания, MA и MB - диаметры окружностей, L – общая касательная окружностей и сферы перпендикулярна плоскости S треугольника AMB , плоскость S проходит через центр сферы, перпендикулярна плоскостям, в которых лежат окружности K_1 и K_2, и является плоскостью симметрии окружностей и сферы..



Окружность K лежит на сфере и касается окружностей K_1 и K_2 в точках P и Q . Если точка P не совпадает с точкой A , то радиус окружности K не максимально возможный. Действительно, окружность K можно «откатить» вдоль окружности K_1 в сторону точки A , увеличить немного ее радиус, а потом «прокатить» ее обратно, до касания с окружностью K_2. Аналогично, для экстремальной окружности K точка касания Q должна совпадать с точкой B . Таким образом, AB - диаметр искомой окружности.

Вычисление длины AB :



Oo_1 и Oo_2 - срединные перпендикуляры, O – центр сферы, $AM = 2r_1$, $BM = 2r_2$,

$\cos\alpha = \dfrac{r_1}{R}$, $\sin\alpha = \dfrac{\sqrt{R^2 - r_1^2}}{R}$, $\cos\beta = \dfrac{r_2}{R}$, $\sin\beta = \dfrac{\sqrt{R^2 - r_2^2}}{R}$,

$\cos(\alpha + \beta) = \dfrac{r_1 \cdot r_2 - \sqrt{(R^2 - r_1^2)(R^2 - r_2^2)}}{R^2}$

$4r_{max}^2 = AB^2 = 4r_1^2 + 4r_2^2 - 8r_1 r_2 \cos(\alpha + \beta) \to$

$r_{max}^2 = r_1^2 + r_2^2 - 2r_1 r_2 \cos(\alpha + \beta)$

В варианте $r_1 = 1,\ r_2 = 2,\ R = 5,\ \cos(\alpha + \beta) = \dfrac{2 - 6\sqrt{14}}{25}$. Тогда $r_{max} = \dfrac{\sqrt{117 + 24\sqrt{14}}}{5} \approx 2{,}87$.