

## 2.12. Заключительный тур олимпиады «Росатом», 10 класс

1. Для каждого целого, положительного  $x$  найти наибольший общий делитель

чисел  $P_1(x) = x^3 + 5x^2 + 4x + 15$  и  $P_2(x) = x^4 + 5x^3 + 15x + 3$ .

2. Вычислить значение  $\cos^2 2x$  для всех допустимых значений  $x$ , если

$$\operatorname{tg}^4 x - 4\operatorname{tg}^2 x + 1 = 0.$$

3. Доказать, что выражение  $2 \cdot 6^n - 25n^2 + 15n - 2$  делится без остатка на 125

при любом натуральном  $n > 1$ .

4. При каких значениях  $a$  три корня уравнения  $4x^3 + 4ax^2 + (a^2 - 2a - 4)x - a^2 - 2a = 0$  могут быть пятым, седьмым и

девятым членами некоторой геометрической прогрессии? Найти квадрат знаменателя этой прогрессии.

5. Острый угол треугольника  $ABC$  равен  $30^\circ$ . Найти максимальное возможное значение отношения  $r : R$ , где  $r$  и  $R$  - радиусы вписанной и описанной окружностей.

### Ответы и решения

Задача 1 Ответ: для  $x = 3k$ ,  $k > 0$ ,  $k \in \mathbb{Z} \rightarrow \text{НОД}(P_1; P_2) = 3$ , для  $x \neq 3k$ ,  $k \in \mathbb{Z} \rightarrow \text{НОД}(P_1; P_2) = 1$ .

Решение

Свойство НОД:  $\text{НОД}(a, b) = \text{НОД}(a + b \cdot c, b) \quad \forall c \in \mathbb{Z}$

$$\text{НОД}(x^3 + 5x^2 + 4x + 15; x^4 + 5x^3 + 15x + 3) =$$

$$= \text{НОД}(x^3 + 5x^2 + 4x + 15; x^4 + 5x^3 + 15x + 3 - x(x^3 + 5x^2 + 4x + 15)) =$$

$$= \text{НОД}(x^3 + 5x^2 + 4x + 15; x^2 + 3) = \text{НОД}(x^2 + 3; x^3 + 5x^2 + 4x + 15 - x \cdot (x^2 + 3)) =$$

$$= \text{НОД}(x^2 + 3; 5x^2 + x + 15) = \text{НОД}(x^2 + 3; 5x^2 + x + 15 - 5 \cdot (x^2 + 3)) =$$

$$= \text{НОД}(x^2 + 3; x) = \text{НОД}(3; x)$$

Тогда если  $x$  делится на 3, то  $\text{НОД}=3$ , если  $x$  не делится на 3, то  $\text{НОД}=1$ .

Задача 2 Ответ:  $\cos^2 2x = \frac{1}{3}$

Решение

Заметим, что для допустимых  $x$  значение  $\operatorname{tg} x \neq 0$ . Разделим на  $\operatorname{tg}^2 x$  правую и левую часть урав-

нения:

$$\operatorname{tg}^2 x + c \operatorname{tg}^2 x = 4 \rightarrow \frac{\sin^2 x}{\cos^2 x} + \frac{\cos^2 x}{\sin^2 x} = 4 \rightarrow \frac{(\cos^2 x - \sin^2 x)^2 + 2 \sin^2 x \cos^2 x}{\sin^2 x \cos^2 x} = \frac{4 \cos^2 2x}{\sin^2 2x} + 2 = 4 \rightarrow$$

$$\rightarrow \frac{\cos^2 2x}{1 - \cos^2 2x} = \frac{1}{2} \rightarrow 2 \cos^2 2x = 1 - \cos^2 2x \rightarrow \cos^2 2x = \frac{1}{3}$$

### Задача 3

Решение

$$6^n = (1+5)^n = 1 + 5n + \frac{n(n-1)}{2} \cdot 25 + k \cdot 125 \text{ для некоторого } k, \text{ зависящего от } n.$$

Тогда  $2(6^n - 1) = 10n + 25n(n-1) + 2k \cdot 125 \rightarrow 2(6^n - 1) - 25n^2 + 15n = 2k \cdot 125$ , т.е. выражение делится на 125.

Задача 4 Ответ: 1) для  $a = -1 - \sqrt{5}$ ,  $q^2 = \frac{\sqrt{5}+1}{2}$  или  $q^2 = \frac{\sqrt{5}-1}{2}$

2) для  $a = -3 - \sqrt{5}$ ,  $q^2 = \frac{\sqrt{5}+1}{2}$  или  $q^2 = \frac{\sqrt{5}-1}{2}$

Решение

1. Нахождение корней уравнения.

Заметим, что  $x = 1$  является решение уравнения при любых  $a$ . Тогда левая часть уравнения раскладывается на множители:

$$(x-1)(4x^2 + 4(a+1)x + a(a+2)) = 0 \rightarrow (x-1)(2x+a)(2x+a+2) = 0$$

Обозначения корней:  $x_1 = 1$ ,  $x_2 = -\frac{a}{2}$ ,  $x_3 = -\frac{(a+2)}{2}$

2. Рассмотрим различные 6 вариантов

Случай 1.  $b_5 = x_2$ ,  $b_7 = x_1$ ,  $b_9 = x_3$  или  $b_5 = x_3$ ,  $b_7 = x_1$ ,  $b_9 = x_2$

Тогда из условия прогрессии  $x_2 \cdot x_3 = x_1^2 \rightarrow \frac{a(a+2)}{4} = 1 \rightarrow a^2 + 2a - 4 = 0 \rightarrow \begin{cases} a_1 = -1 - \sqrt{5} \\ a_2 = -1 + \sqrt{5} \end{cases}$ .

Поскольку  $b_5 = b_7 / q^2$ , а  $b_9 = b_7 \cdot q^2$ , то все три числа  $b_5$ ,  $b_7$ ,  $b_9$  должны быть одного знака.

Для  $a_1 = -1 - \sqrt{5}$  и  $b_5 = x_2 = -\frac{a}{2} = \frac{1 + \sqrt{5}}{2} > 0$ ,  $b_7 = x_1 = 1 > 0$ ,  $b_9 = x_3 = -\frac{a+2}{2} = \frac{\sqrt{5}-1}{2} > 0$

это условие выполняется.

Для  $a_2 = -1 + \sqrt{5}$  и  $b_5 = x_2 = -\frac{a}{2} = \frac{\sqrt{5}-1}{2} > 0$ ,  $b_7 = x_1 = 1 > 0$ ,  $b_9 = x_3 = -\frac{a+2}{2} = -\frac{\sqrt{5}+1}{2} < 0$

условие не выполняется.

Случай 2.  $b_5 = x_1$ ,  $b_7 = x_2$ ,  $b_9 = x_3$  или  $b_5 = x_3$ ,  $b_7 = x_2$ ,  $b_9 = x_1$ .

Из условия прогрессии  $x_1 \cdot x_3 = x_2^2 \rightarrow -\frac{a+2}{2} = \frac{a^2}{4} \rightarrow a^2 + 2a + 4 = 0 \rightarrow a \in \emptyset$

Случай 3.  $b_5 = x_1$ ,  $b_7 = x_3$ ,  $b_9 = x_2$  или  $b_5 = x_2$ ,  $b_7 = x_3$ ,  $b_9 = x_1$ .

Из условия прогрессии  $x_1 \cdot x_2 = x_3^2 \rightarrow -\frac{a}{2} = \frac{(a+2)^2}{4} \rightarrow a^2 + 6a + 4 = 0 \rightarrow \begin{cases} a_3 = -3 - \sqrt{5} \\ a_4 = -3 + \sqrt{5} \end{cases}$ .

Для  $a_3 = -3 - \sqrt{5}$  и  $b_5 = x_1 = 1 > 0$ ,  $b_7 = x_3 = \frac{1 + \sqrt{5}}{2} > 0$ ,  $b_9 = x_2 = \frac{3 + \sqrt{5}}{2} > 0$  условие равного знака выполняется.

Для  $a_4 = -3 + \sqrt{5}$  и  $b_5 = x_1 = 1 > 0$ ,  $b_7 = x_3 = \frac{1 - \sqrt{5}}{2} < 0$ ,  $b_9 = x_2 = \frac{3 - \sqrt{5}}{2} > 0$  условие равного знака не выполняется. Искомыми значениями параметра  $a$  являются  $a = a_1 = -1 - \sqrt{5}$  и  $a = a_3 = -3 - \sqrt{5}$ .

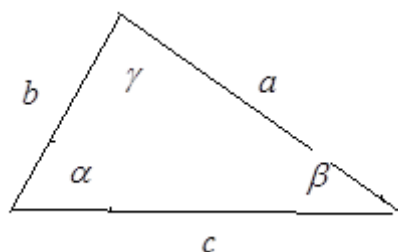
Для  $a = a_1 = -1 - \sqrt{5}$  (случай 1) квадрат знаменателя прогрессии  $q^2 = b_7 : b_5 = \frac{\sqrt{5} - 1}{2}$  или

$q^2 = b_7 : b_5 = \frac{\sqrt{5} + 1}{2}$ . Для  $a = a_3 = -3 - \sqrt{5}$  (случай 3) квадрат знаменателя прогрессии

$q^2 = b_7 : b_5 = x_3 : x_1 = \frac{\sqrt{5} + 1}{2}$  или  $q^2 = b_7 : b_5 = x_3 : x_2 = \frac{\sqrt{5} - 1}{2}$ .

Задача 5 Ответ:  $(r : R)_{\max} = \frac{1 - \sin(15^\circ)}{\cos(15^\circ)} = 2\sqrt{2 + \sqrt{3}} + \sqrt{3} - 2$

Решение



$$a = 2R \sin \alpha, \quad b = \frac{a \sin \beta}{\sin \alpha}, \quad c = \frac{a \sin(\alpha + \beta)}{\sin \alpha}, \quad r = \frac{bc \sin \alpha}{a + b + c} = \frac{a \sin \beta \sin(\alpha + \beta)}{\sin \alpha + \sin \beta + \sin(\alpha + \beta)}$$

$$r : R = \frac{2 \sin \beta \sin(\alpha + \beta)}{\sin \alpha + \sin \beta + \sin(\alpha + \beta)} = \frac{4 \sin \beta \sin \frac{\alpha + \beta}{2} \cos \frac{\alpha + \beta}{2}}{2 \sin \frac{\alpha + \beta}{2} \left( \cos \frac{\alpha - \beta}{2} + \cos \frac{\alpha + \beta}{2} \right)} = \frac{2 \sin \beta \cos \frac{\alpha + \beta}{2}}{2 \cos \frac{\alpha}{2} \cos \frac{\beta}{2}} =$$

$$= \frac{2 \sin \frac{\beta}{2} \cos \frac{\alpha + \beta}{2}}{\cos \frac{\alpha}{2}} = \frac{2}{\cos \frac{\alpha}{2}} \sin \frac{\beta}{2} \left( \cos \frac{\alpha}{2} \cos \frac{\beta}{2} - \sin \frac{\alpha}{2} \sin \frac{\beta}{2} \right) =$$

$$= \frac{1}{\cos \frac{\alpha}{2}} \left( \cos \frac{\alpha}{2} \cdot \sin \beta - \sin \frac{\alpha}{2} (1 - \cos \beta) \right) = \frac{1}{\cos \frac{\alpha}{2}} \left( \sin \left( \beta + \frac{\alpha}{2} \right) - \sin \frac{\alpha}{2} \right)$$

Максимальное значение отношения достигается при  $\beta + \frac{\alpha}{2} = \frac{\pi}{2} \rightarrow \beta^* = \frac{\pi}{2} - \frac{\alpha}{2}$  и оно равно

$$\frac{1 - \sin \frac{\alpha}{2}}{\cos \frac{\alpha}{2}}. \quad \text{Для варианта 1 } \alpha = 30^\circ \text{ и } (r : R)_{\max} = \frac{1 - \sin(15^\circ)}{\cos(15^\circ)}.$$

$$\sin^2 15^\circ = 0,5(1 - \cos 30^\circ) = \frac{2 - \sqrt{3}}{4} \rightarrow \cos^2 15^\circ = \frac{2 + \sqrt{3}}{4}$$

$$\frac{1 - \sin(15^\circ)}{\cos(15^\circ)} = \frac{2}{\sqrt{2 - \sqrt{3}}} - \frac{\sqrt{2 - \sqrt{3}}}{\sqrt{2 + \sqrt{3}}} = 2\sqrt{2 + \sqrt{3}} - (2 - \sqrt{3})$$