1. Общая характеристика заданий

Задание олимпиады Росатом по математике составляется так, чтобы наиболее точно проранжировать участников олимпиады. Задачи олимпиадного задания значительно различаются по сложности. Но и простые и сложные задачи обязательно содержат элементы новизны и оригинальности, требуют для своего решения творческого применения математических теорем и их глубокого понимания. Такая форма задания позволяет, с одной стороны, наиболее точно проранжировать участников олимпиады и выявить наиболее талантливых и способных из них, с другой, «не оттолкнуть» от освоения математики и физики недостаточно подготовленных участников и мотивировать их к дальнейшей самостоятельной работе.

Задачи охватывают все разделы школьной программы и, как правило, носят комплексный характер, требующий объединения различных математических методов. Тем не менее, для решения олимпиадного задания совершенно достаточно знания школьной программы по физике или математике и не требуются какие-то специальные знания и навыки.

Поскольку и отборочный и заключительный тур олимпиады проходят на нескольких региональных площадках в разные сроки, методическая комиссия в рамках единого методического подхода готовит несколько комплектов заданий для отборочного тура и несколько комплектов для заключительного одного уровня сложности.

2. 2013-2014 учебный год

2.5. Заключительный тур олимпиады «Росатом», 11 класс (Москва)

1. Найти числа x такие, что $\lg\left|\sin(x+|x|)\right|$, $\lg\left|\sin 3(x+|x|)\right|$ и $\lg\left|\sin 5(x+|x|)\right|$ являются последовательными членами арифметической прогрессии с ненулевой разностью.

2. Найти наибольшее число $l>0$, для которого существует интервал длины l числовой оси, не содержащий решений уравнения $32\sin^6 x-48\sin^4 x+22\sin^2 x-3=0$.

3. Написать уравнение окружности с центром в начале координат, на которой лежат все точки с координатами $(x;y)$ - решениями системы $\begin{cases}\dfrac{x^3+y^3}{x^2+y^2}=\dfrac{35}{13}\\ x+y=5\end{cases}$.

4. Папа, мама и Петя 2 часа сидели за праздничным столом и вели беседу. Мама из каждой пятиминутки говорила первую, вторую и третью минуты, папа на каждом семиминутном интервале говорил четвертую и пятую минуты, а Петя на каждом временном интервале в девять минут говорил третью и четвертую минуты. Сколько минут за столом папа и мама говорили одновременно, а Петя молчал?

5. При каких значениях a система уравнений $\begin{cases}x-y=a\\ \sin x=\sin(x+2y)\end{cases}$ имеет единственное решение в квадрате $\begin{cases}-\pi\le x\le 0\\ -\pi\le y\le 0\end{cases}$?

6. Математический бильярд имеет форму параллелограмма $ABCD$. На сторонах AD и CD соответственно расположены точки E и F так, что $AE:ED=1:2$, а $DF:FC=1:3$. Шар находится в точке M пересечения прямых BF и CE. Известно, что шар, направленный в точку N борта BC, отразившись от четырех различных бортов, вернулся в точку M и, продолжив свое движение, повторил свою предыдущую траекторию. Найти величину отношения $BN:NC$, если известно, что траектория шара - выпуклый четырехугольник..

2.7. Заключительный тур олимпиады «Росатом», 11 класс (Саров, Киров, Тамбов, Воронеж, Санкт-Петербург)

1. При каких x и a числа $b_1 = 3|x|, b_2 = \sqrt{5x+2}, b_3 = \sqrt{x+2}$ являются тремя последовательными членами геометрической прогрессии, а их логарифмы с основанием a - последовательными членами арифметической прогрессии с разностью $d = -0,5$?

2. Точка A расположена на плоскости и имеет координаты (2;3). Точка B лежит на оси OX и ее абсцисса x удовлетворяет уравнению: $4\cos^3 x \cdot \sin 3x - 6\cos^2 4x + 4\sin^3 x \cdot \cos 3x + 3 = 0$. Найти абсциссу точки B минимально удаленной от точки A.

3. Пол в комнате имеет форму прямоугольника ABCD со сторонами 3 м и 4 м. По комнате бегают две мыши. Первая мышь бегает по периметру комнаты со скоростью 0,2 м/сек., вторая – по диагонали AC со скоростью 0,5 м/сек. В начале движения первая мышь находилась в точке A, вторая – в точке C. Через какое время они встретятся и где? Сколько раз они встретятся в течении часа после начала движения?

4. Положительное, целое число x при делении на 7 имеет остаток 2, а его квадрат x^2 при делении на 49 имеет в остатке 39. Сколько таких чисел находится на отрезке $[100;1000]$?

5. При каких значениях φ система уравнений $\begin{cases} (x-3)^2 + (y-3\sqrt{3})^2 = 9 \\ (x-4\cos\varphi)^2 + (y-4\sin\varphi)^2 = 1 \end{cases}$ имеет ровно два решения?

6. Три кубика с ребрами $1, 2$ и 3 лежат на плоскости. Центры квадратов оснований, лежащих на плоскости, являются вершинами правильного треугольника со стороной 4. Провести плоскость в пространстве так, что она пересекает кубы и делит их на две равновеликие части. Найти двугранный угол образованный плоскостью сечения и плоскостью основания.

2.8. Заключительный тур олимпиады «Росатом», 11 класс (Сергиев Посад, Обнинск)

1. Все члены геометрической прогрессии – целые числа. Сумма квадратов первых трех ее членов равна 2275. Найти третий член прогрессии.

2. Найти сумму первых 128 неотрицательных решений уравнения

$$3(ctg2x - ctgx) + 4\sin x = 0$$

3. Путевой обходчик идет по перегону от станции A до станции B с постоянной скоростью. Каждые 14 мин он встречает поезд, идущий ему навстречу со станции B, и каждые 7 мин его обгоняет поезд, идущий со станции A.

Скорость движения обходчика составляет $1/14$ скорости поезда, которая постоянна для всех поездов на этом перегоне. Каков временной интервал движения попутных поездов через станцию A и встречных поездов через станцию B?

4. Найти все пары целых чисел x и y, для которых $3y = 3^{y/x}$. Найти наибольшее возможное значение выражения $\log_x y$.

5. При каких значениях α система уравнений $\begin{cases} (x-4\cos\alpha)^2 + (y-4\sin\alpha)^2 = 1 \\ x + y - \sqrt{2} = 0 \end{cases}$ имеет ровно два решения?

6. Вершина правильной четырехугольной пирамиды совпадает с центром сферы радиуса R, проходящей через вершины основания. Найти наибольшее возможное при этих условиях значение объема пирамиды.

2.9. Заключительный тур олимпиады «Росатом», 11 класс (Лесной, Снежинск, Курчатов, Ковров, Озерск, Калининград, Смоленск, Рязань, Нововоронеж, Северск, Калуга)

1. Найти x и y, для которых числа $\log_{\pi-x-3y}(2x+y)$, $2\log_{3x+5y}(2x+y)$ и $4\log_{3x+5y}(\pi-x-3y)$ могут быть последовательными членами геометрической прогрессии, а числа $\sin x$, $\cos 0,5(x-y)$ и $\sin y$ - последовательными членами арифметической прогрессии.

2. Числа x являются решениями уравнения

$$\lg\frac{\cos^2 x}{27}-4\lg\left(2\sin^2 x\right)=4\lg tgx+\lg 4 .$$

Найти наибольшее значение выражения $\dfrac{x}{x^2+1}$.

3. При каких целых n сумма n членов арифметической прогрессии с первым членом $a_1=3/5$ и разностью $d=2/9$ является целым числом?

4. Найти наименьший радиус круга, содержащего все точки M на плоскости, координаты $(x;y)$ которых целые числа, удовлетворяющие уравнению $x^2+4x-32=4^y$.

5. При каких значениях a система $\begin{cases}|\sin x|=\cos y\\ |x|+|y|=a\end{cases}$ имеет бесконечное число решений?

6. На плоскости лежат 3 одинаковых конуса так, что 1) их вершины находятся в одной точке плоскости; 2) каждый конус касается плоскости по образующей; 3) каждый конус касается двух соседних конусов по образующей. Найти угол осевого сечения конусов.