2.12. Отборочный тур олимпиады «Росатом», 9 класс

Ответы и решения

Задача 1.

$$\begin{cases} 2p^2 - 2q = 0 \\ q^2 + pq - 2q = 0 \rightarrow q(q+p-2) = 0 \end{cases}$$

Случай 1 $q = 0 \rightarrow p = 0$

Случай 2 $q \neq 0 \rightarrow q = 2 - p \rightarrow 2p^2 + 2p - 4 = 0 \rightarrow p^2 + p - 2 = 0 \rightarrow \begin{cases} p = 1 \rightarrow q = 1 \\ p = -2 \rightarrow q = 4 \end{cases}$

Задача 2

$(2a_1 + d(n-1))n = 2(a_1 + d(k-1))$

Полагая $a_1 = 3,\ d = \dfrac{1}{2}$, получим $2k = n^2 + 11n - 10$.

Для $n = 2 \rightarrow 2k = 16 \rightarrow k_{\min} = 8$

Задача 3

При $n = 1 \rightarrow 3^4 - 8 - 9 = 64 \rightarrow$ утверждение верно.

Индуктивное предположение: утверждение верно при $n = k$

Доказательство утверждения для $n = k + 1$

$3^{2(k+1)+2} - 8(k+1) - 9 = 9(3^{2k+2} - 8k - 9) + 64k + 64$

Первое слагаемое делится на 64 по предположению,

второе и третье содержат множитель 64.

Решение: a – делитель 23 $\rightarrow a = \{\pm 1; \pm 23\}$

Случай $a = 1. \rightarrow x^2 + bx + 23 = 0 \rightarrow x_{1,2} = \begin{cases} 1 \\ 23 \\ b = -24 \end{cases} \quad x_{1,2} = \begin{cases} -1 \\ -23 \\ b = 24 \end{cases}$

$(2a + 3b)_{\max} = 74$

Случай $a = -1. \rightarrow x^2 - bx - 23 = 0 \rightarrow x_{1,2} = \begin{cases} 1 \\ -23 \\ b = 22 \end{cases} \quad x_{1,2} = \begin{cases} -1 \\ 23 \\ b = -22 \end{cases}$

$(2a + 3b)_{\max} = 64$

Случай $a = 23. \rightarrow 23x^2 + bx + 23 = 0 \rightarrow x_{1,2} = \begin{cases} 1 \\ 1 \\ b = -46 \end{cases} \quad x_{1,2} = \begin{cases} -1 \\ -1 \\ b = 46 \end{cases}$

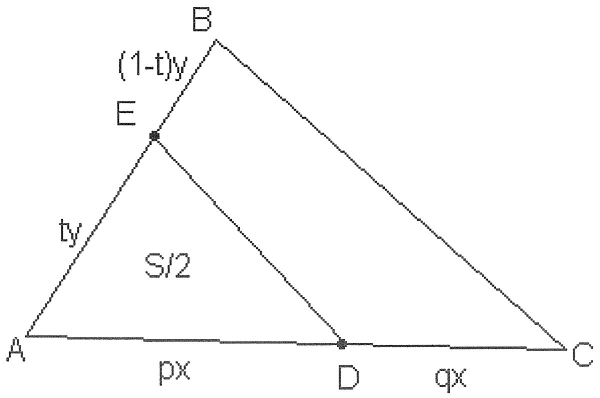
$(2a + 3b)_{\max} = 184$

Случай $a = -23. \rightarrow 23x^2 - bx - 23 = 0 \rightarrow x_{1,2} = \begin{cases} 1 \\ -1 \\ b = 0 \end{cases}$

Задача 4

$(2a + 3b)_{\max} = -46$

Задача 5



Случай $p > q$, точка E находится на стороне AB, S – площадь $\triangle ABC$.

$$S_{ADE} : S = \frac{ty}{y} \cdot \frac{px}{(p+q)x} = \frac{tp}{p+q} = \frac{1}{2} \rightarrow t = AE : AB = \frac{p+q}{2p}$$

Случай $p < q$, точка E находится на стороне BC.

$$t = CE : BC = \frac{p+q}{2q}$$

В задании: $p = 3,\ q = 2 \quad \Rightarrow \quad t = \frac{5}{6}$