

2.13. Заключительный тур олимпиады «Росатом», 9 класс

Ответы и решения

Задача 1 Ответ: 2

$5-x$, $9-2x$, $9-x$ - измененные длины сторон, $0 < x < 5$

$$(9-x)^2 = (5-x)^2 + (9-2x)^2 + (5-x)(9-2x) \rightarrow 6x^2 - 47x + 70 = 0 \rightarrow$$

Наибольшая длина $9-x$:
$$\begin{cases} x=2 \\ x=\frac{35}{6} > 5 \end{cases}$$

Задача 2 Ответ: 1) $a = -8$, $b = 9$ 2) $4x^2 - x + 3$

$$16x^4 + ax^3 + 25x^2 - 6x + b = (4x^2 + Ax + B)^2 =$$

$$= 16x^4 + A^2x^2 + B^2 + 8Ax^3 + 8Bx^2 + 2ABx =$$

$$= 16x^4 + 8Ax^3 + (A^2 + 8B)x^2 + 2ABx + B^2$$

$$8A = a, \quad A^2 + 8B = 25, \quad 2AB = -6, \quad B^2 = b$$

$$A^3 + 8AB = 25A \rightarrow A^3 - 25A - 24 = 0 \rightarrow \begin{cases} A = -1 \\ A^2 - A - 24 = 0 \rightarrow \text{целых нет} \end{cases}$$

$$B = 3, \quad a = -8, \quad b = 9$$

Задача 3 Ответ: 1) $a_{15} = 44, d = 3$ 2) $a_{15} = -44, d = -3$

$$S_n^2 = \frac{n(6n^2 + 3n - 1)}{2} \rightarrow S_{n+1}^2 - S_n^2 = (3n+2)^2 = a_{n+1}^2 \rightarrow a_{n+1} = \begin{cases} 3n+2 \rightarrow d = 3 \\ -3n-2 \rightarrow d = -3 \end{cases}$$

$$a_{15} = \begin{cases} 44 \\ -44 \end{cases}$$

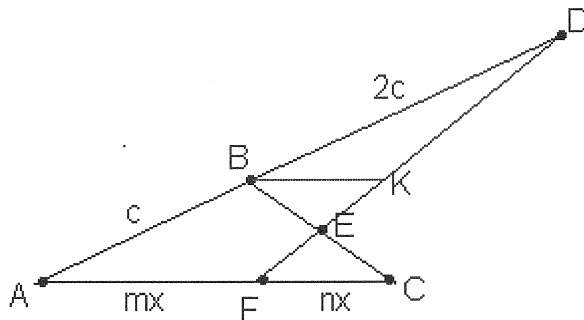
Задача 4 Ответ: $a = 2n - 3, n \in \mathbb{Z}, n \geq 1$

$$a = |x| + x - 3 = \begin{cases} 2x - 3, & x \geq 0 \\ -3, & x < 0 \end{cases}$$

При $a = -3$ все отрицательные x являются решениями, поэтому не все решения целые числа. Целое решение $x = n, n \in \mathbb{Z}$ возникает, если $a = 2n - 3$ при $n > 0$. Оно единственное.

Задача 5 Ответ: 1) 1) 2:9, 2) 2:3

Решение. Случай 1. Расположение точки D указано на рис.

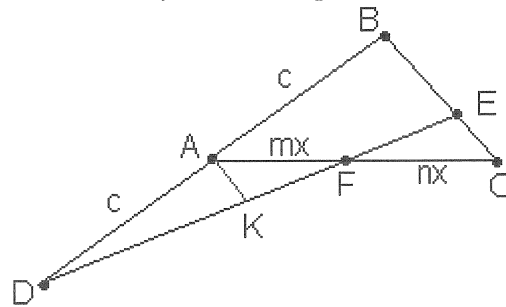


Прямая BK параллельна $AC \rightarrow \frac{BK}{mx} = \frac{2c}{3c} \rightarrow BK = \frac{2mx}{3}$

Из подобия $\triangle BKE$ и $\triangle CFE \rightarrow \frac{BK}{nx} = \frac{BE}{EC} \rightarrow \frac{BE}{EC} = \frac{2m}{3n}$

В задании $m = 1, n = 3 \rightarrow BE : EC = 2 : 9$

Случай 2. Расположение точки D указано на рис.



Прямая AK параллельна BC , из подобия $\triangle DAK$ и $\triangle DBE \rightarrow AK = \frac{BE}{2}$

Из подобия $\triangle AFK$ и $\triangle CFE \rightarrow \frac{AK}{EC} = \frac{m}{n} \rightarrow BE : EC = 2m : n$

$BE : EC = 2 : 3$