

2.10. Отборочный тур олимпиады «Росатом», 10 класс

Ответы и решения

Задача 1

Случай 1. $(x^2 + mx + 3)^2 = x^4 + 2mx^3 + (m^2 + 6)x^2 + 6mx + 9$

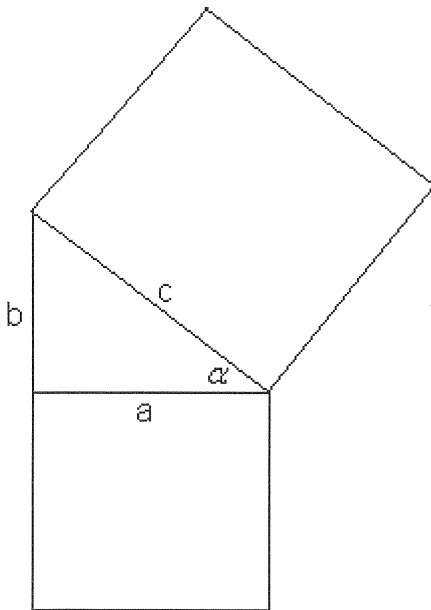
$P(1) = 9 \rightarrow 1 + a + b + c + 9 = 9 \rightarrow a + b + c = -1$

Сравнение коэффициентов $\begin{cases} a = 2m \\ b = m^2 + 6 \rightarrow m^2 + 8m + 7 = 0 \\ c = 6m \end{cases} \rightarrow \begin{cases} m = -1 \\ m = -7 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} a = -2 \\ b = 7 \\ c = -6 \end{cases} \begin{cases} a = -14 \\ b = 55 \\ c = -42 \end{cases}$

Случай 2. $(x^2 + mx - 3)^2 = x^4 + 2mx^3 + (m^2 - 6)x^2 - 6mx + 9$

Сравнение коэффициентов $\begin{cases} a = 2m \\ b = m^2 - 6 \rightarrow m^2 - 4m - 5 = 0 \\ c = -6m \end{cases} \rightarrow \begin{cases} m = -1 \\ m = 5 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} a = -2 \\ b = -5 \\ c = 6 \end{cases} \begin{cases} a = 10 \\ b = 19 \\ c = -30 \end{cases}$

Задача 2



$$\frac{\sqrt{3}}{14}(c^2 + c^2 \cdot c \cos^2 \alpha) = \frac{1}{2}c^2 \sin \alpha \cos \alpha \rightarrow \sqrt{3}(\sin^2 \alpha + 2 \cos^2 \alpha) = 7 \sin \alpha \cos \alpha \rightarrow$$

$$\sqrt{3}tg^2 \alpha - 7tg \alpha + 2\sqrt{3} = 0 \rightarrow \begin{cases} tg \alpha = \frac{1}{\sqrt{3}} \\ tg \alpha = 2\sqrt{3} \end{cases} \rightarrow \text{больший катет} \rightarrow \text{меньший тангенс}$$

$$\alpha = 30^\circ$$

Задача 3

x – количество долларовых монет;

y – количество евро; z – количество фунтов стерлингов.

$$\begin{cases} x + y + z = 100 \\ 32x + 40y + 50z = 3930 \end{cases} \rightarrow x \text{ делится на } 5 \rightarrow x = 5k \rightarrow$$

$$\begin{cases} 16k + 4y + 5z = 393 \\ 5k + y + z = 100 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} y = 107 - 9k \geq 0 \\ z = 4k - 7 \geq 0 \end{cases} \rightarrow 2 \leq k \leq 11$$

$$x_{\max} = 5 \cdot k_{\max} = 5 \cdot 11 = 55$$

Задача 4

Случай 1. $x_1 \neq x_2$ (x_3 – не целый корень). Варианты $x = \pm 1; \pm 7$

$$1) x_1 = 1, x_2 = -1 \rightarrow \begin{cases} a + b + c + 7 = 0 \\ -a + b - c + 7 = 0 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} a = t \\ b = -7, t \in Z, t \neq 0; \pm 1 \\ c = -t \end{cases}$$

$$(a^2 + b^2 + c^2) = (49 + 2t^2)_{\min} = 57$$

$$2) x_1 = 1, x_2 = 7 \rightarrow \begin{cases} 49a + 7b + c + 1 = 0 \\ a + b + c + 7 = 0 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} a = t \\ b = 1 - 8t, t \in \mathbb{Z}, t \neq 1 \\ c = 7t - 8 \end{cases}$$

$$(a^2 + b^2 + c^2)_{\min} = 51 \text{ при } t = 1$$

$$3) x_1 = 1, x_2 = -7 \rightarrow \begin{cases} 49a - 7b + c - 1 = 0 \\ a + b + c + 7 = 0 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} a = t \\ b = 6t - 1, t \in \mathbb{Z}, t \neq 1 \\ c = -7t - 6 \end{cases}$$

$$(a^2 + b^2 + c^2)_{\min} = 51 \text{ при } t = -1$$

$$4) x_1 = -1, x_2 = 7 \rightarrow \begin{cases} 49a + 7b + c + 1 = 0 \\ -a + b - c + 7 = 0 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} a = t \\ b = -1 - 6t, t \in \mathbb{Z}, t \neq 1 \\ c = -7t + 6 \end{cases}$$

$$(a^2 + b^2 + c^2)_{\min} = 195 \text{ при } t = -1 \text{ (третий корень совпадает с первым)}$$

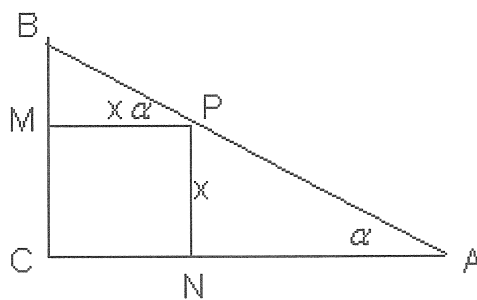
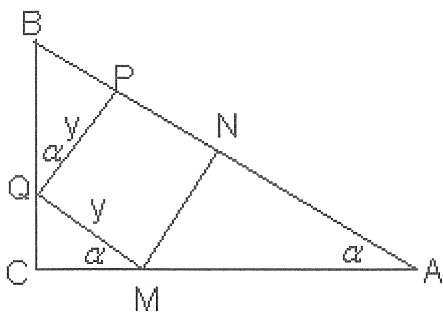
$$5) x_1 = -1, x_2 = -7 \rightarrow \begin{cases} 49a - 7b + c - 1 = 0 \\ -a + b - c - 1 = 0 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} a = t \\ b = 1 + 8t, t \in \mathbb{Z}, t \neq -1 \\ c = 7t - 8 \end{cases}$$

$$(a^2 + b^2 + c^2)_{\min} = 301 \text{ при } t = -1$$

Задача 5

α - меньший из углов, c - гипотенуза

На рис. изображены оба вписанных квадрата.



Для первого квадрата: $\frac{y}{\cos \alpha} + y \sin \alpha = BC = c \sin \alpha \rightarrow y = \frac{c \sin \alpha \cos \alpha}{1 + \sin \alpha \cos \alpha}$

Для второго квадрата: $\frac{x}{\cos \alpha} + \frac{x}{\sin \alpha} = AB = c \rightarrow x = \frac{c \sin \alpha \cos \alpha}{\sin \alpha + \cos \alpha}$

$\frac{y}{x} = \frac{\sin \alpha + \cos \alpha}{1 + \sin \alpha \cos \alpha}$ Замена $t = \sin \alpha + \cos \alpha \rightarrow \sin \alpha \cos \alpha = \frac{t^2 - 1}{2} \rightarrow$

$\frac{y}{x} = \frac{2t}{1+t^2} \rightarrow yt^2 - 2tx + y = 0$

В задании: $x = \frac{12}{7}, y = \frac{60}{37} \rightarrow 35t^2 - 74t + 35 = 0 \rightarrow \begin{cases} \sin \alpha + \cos \alpha = \frac{5}{7} \\ \sin \alpha + \cos \alpha = \frac{7}{5} \end{cases}$

Если $\sin \alpha + \cos \alpha = \frac{5}{7}$, то $\sin \alpha \cos \alpha = \frac{t^2 - 1}{2} < 0$. Для $\sin \alpha + \cos \alpha = \frac{7}{5}$

$\sin \alpha \cos \alpha = \frac{t^2 - 1}{2} = \frac{12}{25} \rightarrow \sin \alpha = \frac{3}{5}, \cos \alpha = \frac{4}{5}$.

Тогда $c = \frac{x(\sin \alpha + \cos \alpha)}{\sin \alpha \cos \alpha} = 5 \rightarrow S_{ABC} = 6$