5.1.3. Олимпиада имени академика И.В.Курчатова, 11 класс (отборочный тур олимпиады «Росатом»)

1. При каких значениях y неравенство $\frac{(x-y)(x-2y+1)}{x+2y-15} \le 0$ выполняется при всех $x \in [7;10]$? Найти наибольшее целое решение неравенства при $y=1$.

2. Найти x, для которых геометрическая прогрессия b_n с первым членом $b_1 = \sin x$ и знаменателем $q = 2\cos x$ является убывающей последовательностью. При каких x последовательность b_n является бесконечно убывающей геометрической прогрессией с суммой $8ctgx$?

3. Целое четырехзначное положительное число a удовлетворяет трем условиям: 1) разность между цифрой сотен числа a и цифрой единиц равна цифре десятков; 2) цифра сотен равна утроенной сумме цифр тысяч и единиц; 3) разность между числом, записанным теми же цифрами, но взятыми в обратном порядке и числом a равна 819. Найти число a.

4. Найти цифры x и y такие, что число записанное цифрами $\overline{2345xy}$ при делении на 5 и 7 имеет остаток 1 и 2 соответственно.

5. При каких a - решениях уравнения $|\sin \pi a| = 1$ - неравенство $\frac{\log_x\left(a^2-2a-3\right)-1}{a^2-10a+24} < 0$ выполняется для хотя бы одного $x \in \left[\frac{9}{4};12\right]$?

6. Около треугольника ABC, длины сторон которого равны $1, 2,$ и 2, описана окружность. Продолжения медиан треугольника ABC пересекают окружность в точках M, N и L. Найти площадь треугольника MNL.