

5.1.2. Олимпиада имени проф. И.В.Савельева, 11 класс (отборочный тур олимпиады «Росатом»)

1. При каких x неравенство $\frac{(x-y)^2(x+2y)}{x+y+1} \geq 0$ выполняется для всех решений

y уравнения $4\sqrt{y} = y + 3$?

2. Для всех целых n решить систему уравнений:
$$\begin{cases} \sin x \cdot \cos y = n, \\ x - 2y = \frac{\pi}{2} \end{cases} .$$

3. Найти четыре последовательных целых числа, для которых куб большего равен сумме кубов остальных.

4. Рассмотрим прямоугольный параллелепипед, объем которого численно равен сумме длин его ребер. Найти все возможные значения его объема при условии, что длины его ребер – целые числа.

5. Функция $f(x)$ в каждой точке x принимает значение, равное максимуму выражения $(x+2)y^2 + (3-2x)y + 3x + a$ по переменной y на отрезке $[1;4]$. При каких значениях a неравенство $f(x) \geq 0$ выполняется для всех $x \geq -3$?

6. Участок земли в форме прямоугольного треугольника с катетами 4 и 3 надо разделить прямой L на два участка так, чтобы 1) участки имели равную площадь; 2) длина общей части границы (забора) участков минимальна. Указать точки на сторонах треугольника, через которых проходит искомая прямая L и найти длину забора.