5.2.2. Задание заключительного тура олимпиады «Росатом» в гг. Москва, Волгодонск, Сергиев Посад, 11 класс

1. Найти все числа x, являющиеся решениями неравенства $\dfrac{(x-2a)(x-a)}{\log_2(x+a)} \le 0$

для хотя бы одного целого a - решения неравенства $3^a + 3^{6-a} \le 90$.

2. Обозначим через X множество решений уравнения $\sin^4 x + \cos^4 x = \sin x \cdot \cos x$. Найти такое $x \in X$, для которого выражение $x^2 + \dfrac{\pi^4}{x^2}$ принимает наименьшее возможное значение.

3. Три неравных между собой числа x, y и z в указанном порядке являются тремя последовательными членами арифметической прогрессии. Известно, что их можно переставить так, что они станут последовательными членами геометрической прогрессии. Найти эти числа, если $3x^2 + 5y^2 + 7z^2 = 324$.

4. Найти все целые числа на отрезке $[500; 5000]$, остатки от деления которых на 3, 5 и 7 равны 2, 4 и 6 соответственно.

5. При каких значениях a неравенство $x^2 - 2ax + y^2 + (8-2a)y + a^2 - 8a + 16 \le 0$ выполняется для всех пар $(x; y)$,

для которых $1 \le x \le 3,\ 1 \le y \le 3$?

6. Поле для гольфа имеет форму, изображенную на рис. $ABCD$ – прямоугольник. Криволинейная часть границы представляет полуокружность. Периметр поля равен L. Найти размеры поля, если его площадь имеет наибольшее, возможное при этих условиях, значение.