Ответы и решения

Задача 1 Ответ:

$$a=\frac{2^{\pi k}\pm\sqrt{2^{2\pi k}-16}}{2},\ b=\frac{2^{\pi k}\mp\sqrt{2^{2\pi k}-16}}{2},\ k\geq 1,\ k\in Z$$

$$a=\frac{2^{\pi k}\pm\sqrt{2^{2\pi k}+16}}{2},\ b=\frac{2^{\pi k}\mp\sqrt{2^{2\pi k}+16}}{2},\ k\in Z$$

Решение. Решение:

Заметим, что $f(x)=\sin\left(\psi(a,b)x+\varphi(a,b)\right)$ будет нечетной, если для всех $x\in R$

$\sin\left(-\psi(a,b)x+\varphi(a,b)\right)\equiv-\sin\left(\psi(a,b)x+\varphi(a,b)\right)$, или

$\sin\left(\psi(a,b)x-\varphi(a,b)\right)\equiv\sin\left(\psi(a,b)x+\varphi(a,b)\right)$, т.е.

$$\left[\begin{array}{l}\psi(a,b)x-\varphi(a,b)=\psi(a,b)x+\varphi(a,b)+2\pi k,\\ \psi(a,b)x-\varphi(a,b)=\pi-\psi(a,b)x-\varphi(a,b)+2\pi k,\end{array}\right.\Rightarrow\left[\begin{array}{l}\varphi(a,b)=\pi k,\ k\in Z\\ 2\psi(a,b)x=\left(2k+1\right)\pi\end{array}\right.$$

Второе равенство тождеством по x не является, поэтому равенство $\psi(a,b)=\pi k$ для любого $k\in Z$ является условием нечетности функции $f(x)$.

Наименьший период функции $f(x)$ равен $T=\dfrac{2\pi}{|\psi(a,b)|}$. Таким образом, параметры a,b являются решениями системы $\begin{cases}\varphi(a,b)=\pi k,\\ T\cdot|\psi(a,b)|=2\pi\end{cases}$ для любого целого k.

Те же условия сохраняются для четности и периодичности функции $\cos\left(\psi(a,b)x+\varphi(a,b)\right)$ (вариант 2). Для нечетности и периодичности функций $tg\left(\psi(a,b)x+\varphi(a,b)\right), ctg\left(\psi(a,b)x+\varphi(a,b)\right)$ (варианты 3и 4)достаточно выполнений условий $\begin{cases}T\,|\psi(a,b)|=\pi,\\ \varphi(a,b)=\dfrac{\pi k}{2}\end{cases}$

Для варианта 1 $\psi(a,b)=ab,\ \varphi(a,b)=\log_2\left(a+b\right),\ T=\dfrac{\pi}{2}$. Параметры a,b искомые, если $\begin{cases}ab=4\\ a+b=2^{\pi k}\end{cases}$ или $\begin{cases}ab=-4\\ a+b=2^{\pi k}\end{cases}$. Решения первой системы являются корнями квадратного уравнения

$z^2-2^{\pi k}z+4=0$ с дискриминантом $D=2^{2\pi k}-16\geq0\to k=1,2,3...$

Решения второй удовлетворяют квадратному уравнению $z^2-2^{\pi k}z-4=0$ с положительным дискриминантом при любых $k\in Z$.

Для варианта 2 $\psi(a,b)=\log_4\left(a-b\right),\ \varphi(a,b)=a+b,\ T=4\pi$. Условие на параметры a,b сводится к решению системы $\begin{cases}|\log_4(a-b)|=\dfrac{1}{2}\\ a+b=\pi k,\ k\in Z\end{cases}$ т.е. $\begin{cases}a-b=2\\ a+b=\pi k\end{cases}$ или $\begin{cases}a-b=\dfrac{1}{2},\\ a+b=\pi k\end{cases}$

Для варианта 3 $\psi(a,b)=a-b,\ \varphi(a,b)=\pi\log_3\left(a+2b\right), T=\frac{\pi}{4}$. Условия на параметры сводится к системе $\begin{cases} T\left|\psi(a,b)\right|=\pi, \\ \varphi(a,b)=\frac{\pi k}{2} \end{cases}$ т.е. $\begin{cases} a+2b=3^{k/2} \\ a-b=4 \end{cases}$ или $\begin{cases} a+2b=3^{k/2} \\ a-b=-4 \end{cases}$

Для варианта 4 $\psi(a,b)=\left(a+2b\right)\pi,\ \varphi(a,b)=-\lg(b-2a),\ T=2$. Условия на параметры a,b сводятся к той же системе , т.е. $\begin{cases} \left|a+2b\right|=\frac{1}{2}, \\ b-2a=10^{-\pi k/2} \end{cases}$

Задача 2 Ответ: 2π

1) $\left(\frac{\pi k}{4};\frac{\pi k}{2}\right), k=0;\pm1;\pm2;\pm3$ 2) $\left(\frac{\pi}{3}+\pi k;\frac{2\pi}{3}+2\pi k\right), k=-1;0$

3) $\left(-\frac{\pi}{3}+\pi k;-\frac{2\pi}{3}+2\pi k\right), k=0;1$ 4) $\left(\frac{\pi k}{6};\frac{5\pi k}{6}\right), k=\pm1;\pm2$, 5) $\left(\frac{\pi}{6}+\frac{\pi k}{2};\frac{5\pi}{6}+\frac{5\pi k}{2}\right), k=-1;0$

6) $\left(-\frac{\pi}{6}+\frac{\pi k}{2};-\frac{5\pi k}{2}+\frac{5\pi k}{2}\right), k=0,1$

Решение:

Для варианта 1 решается однородное уравнение: $t=\frac{y}{x}\to t^2-7t+10=0\to\left[\begin{array}{l} y=2x \\ y=5x \end{array}\right.$.

Случай 1.

$$\begin{cases} y=2x \\ \sin 2x+\sin 6x+\sin 2y=0 \end{cases}\to\sin 2x+\sin 4x+\sin 6x=0$$

$$2\sin 4x\cos 2x+\sin 4x=0\to\sin 4x(2\cos 2x+1)=0\to\begin{cases} x=\frac{\pi k}{4} \\ y=\frac{\pi k}{2} \end{cases}$$

или $\begin{cases} x=\frac{\pi}{3}+\pi k, \\ y=\frac{2\pi}{3}+2\pi k \end{cases}$ или $\begin{cases} x=-\frac{\pi}{3}+\pi k \\ y=-\frac{2\pi}{3}+2\pi k,\ k\in Z \end{cases}$

Отбор решений по условию $3\left|x\right|+2\left|y\right|\le 6\pi$: $7\left|x\right|\le 6\pi\to\left|x\right|\le\frac{6\pi}{7}$. Для первой серии $x=\frac{\pi k}{4}$ эти ограничения приводят к условию $\left|k\right|\le 3$, а для второй $x=\frac{\pi}{3}+\pi k$ - к условию $k=-1;0$. Наконец, для третьей серии $x=-\frac{\pi}{3}+\pi k$ ограничение приведет к условию $k=0;1$

Случай 2.

$$\begin{cases} y = 5x \\ \sin 2x + \sin 6x + \sin 2y = 0 \end{cases} \rightarrow \sin 2x + \sin 6x + \sin 10x = 0$$

$$2\sin 6x \cos 4x + \sin 6x = \sin 6x(2\cos 4x + 1) = 0$$

$$\begin{cases} x = \dfrac{\pi k}{6} \\ y = \dfrac{5\pi k}{6} \end{cases} \text{ или } \begin{cases} x = \dfrac{\pi}{6} + \dfrac{\pi k}{2} \\ y = \dfrac{5\pi}{6} + \dfrac{5\pi k}{2} \end{cases} \text{ или } \begin{cases} x = -\dfrac{\pi}{6} + \dfrac{\pi k}{2} \\ y = -\dfrac{5\pi}{6} + \dfrac{5\pi k}{2} \end{cases}$$

Ограничения в форме $3|x| + 2|y| \le 6\pi$ приводят в этом случае к условию $|x| \le \dfrac{6\pi}{13}$. Для первой серии $x = \dfrac{\pi k}{6}$ возможные значения $k = 0; \pm 1; \pm 2$, для серии $x = \dfrac{\pi}{6} + \dfrac{\pi k}{2}$ - $k = -1; 0$, для серии

$x = -\dfrac{\pi}{6} + \dfrac{\pi k}{2}$ допустимы значения $k = -1; 0$.

Задача 3 Ответ: 58 , $a = 1, b = 4, c = 5$

Решение:

x, y, z – длины ребер. Условие задачи: $\begin{cases} x + y + z = 10 \\ 2xyz + 3\left(x^2 + y^2 + z^2\right) = 166 \end{cases}$

Преобразования: $2xyz + 3\left(\left(x + y\right)^2 - 2xy + z^2\right) = 166,$

$$2xy(z-3) + 3\left(\left(10 - z\right)^2 + z^2\right) = 166 \rightarrow xy = \frac{-3z^2 + 30z - 67}{z - 3} = -3z + 21 - \frac{4}{z - 3}$$

Условия целочисленности и положительности: $z - 3 = 1,\ z - 3 = -1,$
$z - 3 = 2,\quad z - 3 = -2,\ \ z - 3 = 4$

Случай $z = 1.\begin{cases} x + y = 9 \\ xy = 9 \end{cases} \rightarrow x = 4,\ y = 5,\ z = 1$ (без учета порядка)

Полная поверхность $S = 2\left(xy + xz + yz\right) = 58$

Случай $z = 2.\begin{cases} xy = 19 \\ x + y = 8 \end{cases} \varnothing$

Случай $z = 4.\begin{cases} xy = 5 \\ x + y = 8 \end{cases} \rightarrow x = 1,\ y = 5,\ z = 4$

Случай $z = 5.\begin{cases} xy = 4 \\ x + y = 5 \end{cases} \rightarrow x = 1,\ y = 4,\ z = 5$

Случай $z = 7\begin{cases} xy = -1 \\ x + y = 3 \end{cases} \varnothing$

Задача 4 Ответ: $x = 493,\ \ y = 384$

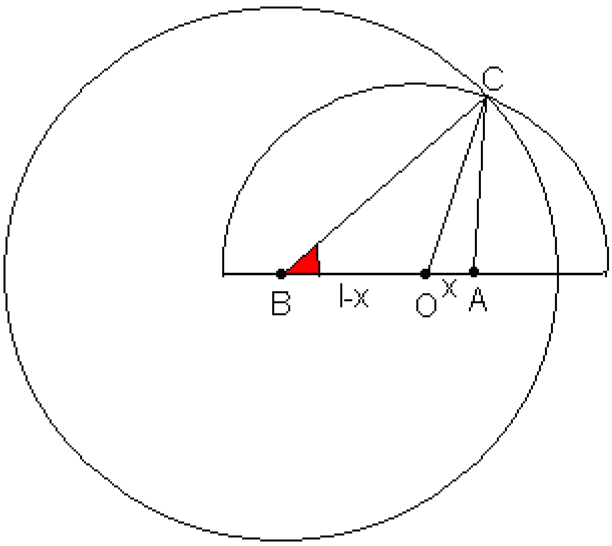
Решение.

$$x = 100n + 93 = (47 \cdot 2 + 6) \cdot n + (47 \cdot 2 - 1) = 47(2n + 2) + 6n - 1 \to$$
$$y = 877 - x > 0 \to x < 877 \to n = 0,1,...,7$$
$$y = (47 \cdot 18 + 31) - 47(2n + 2) - 6n + 1 = 47(16 - 2n) + 32 - 6n \to$$
$$32 - 6n = 8 \to n = 4$$
$$x = 493, \quad y = 384$$

Задача 5 Ответ: $k_1 = 3,\ k_2 = \dfrac{49}{23}$

Задача 6 Ответ: $BC_{\max} = \dfrac{3\sqrt{2}}{2} \quad l = 3,\ R = 2,\ L > R\sqrt{2}$

Решение: случай $l > R, \quad x = OB, \quad l - R \le x \le R \to l - R \le l - x \le R$



Построение функции длины основания BC от переменной x.

$$R^2 = l^2 + (l - x)^2 - 2l(l - x)\cos\alpha \to \cos\alpha = \frac{l^2 - R^2 + (l - x)^2}{2l(l - x)}$$

$$BC^2 = a^2 = 4l^2 \sin^2\frac{\alpha}{2} = 2l^2(1 - \cos\alpha) = l\,\frac{2l(l - x) - (l^2 - R^2) - (l - x)^2}{l - x}$$

Критическая точка: $l - x = \sqrt{l^2 - R^2}$. Принадлежность критической точки допустимому интервалу: $l - R \le \sqrt{l^2 - R^2} \le R \to l \in \left[R; R\sqrt{2}\right]$. При $l > R\sqrt{2}$ критическая точка не принадлежит допустимому интервалу изменения x. В этом случае, максимальное значение a^2 достигается на конце отрезка в точке $x = l - R$ и оно равно $a_{\max} = l\sqrt{\dfrac{2R - l}{R}}$.

При $l \in \left[R; R\sqrt{2}\right]$ значение a^2 в критической точке равно $2l\left(l-\sqrt{l^2-R^2}\right)$ и оно больше $l^2 \cdot \dfrac{2R-l}{R}$ для всех $l \in \left[R; R\sqrt{2}\right]$. Итак, в случае $l > R$ ответ следующий:

$$a_{\max} = \begin{cases} \sqrt{2l\left(l-\sqrt{l^2-R^2}\right)}, \text{при } l \in \left[R, R\sqrt{2}\right] \\ l\sqrt{\dfrac{2R-l}{R}}, \text{при } l \in \left(R\sqrt{2}; 2R\right) \end{cases}$$