Ответы и решения

Задача 1 Ответ: $x \in (1;2)$

Задача 2 Ответ:

При $n \neq 0$ $(x;y) \in \varnothing$, при $n = 0$ $\begin{cases} x = \dfrac{5\pi}{12} + \dfrac{\pi k}{2} \\ y = -\dfrac{\pi}{12} - \dfrac{\pi k}{2} \end{cases}$, $k \in Z$

Задача 3 Ответ:

1) $-2; -1; 0; 1$
2) $-5; -1; 3; 7$
3) $-5; 0; 5; 10$
4) $1; 3; 5; 7$
5) $0; 3; 6; 9$

Решение.

$a_2-d, a_2, a_2+d, a_2+2d$ – упорядоченные члены прогрессии, $d>0$,
a_2 – целые числа.

$$5(a_2+2d)=\left(a_2-d\right)^2+a_2^2+\left(a_2+d\right)^2=3a_2^2+2d^2\rightarrow a_2\left(3a_2-5\right)=2d\left(5-d\right)$$

Значение квадратного трехчлена слева отрицательно только при одном целом $a_2=1$. Тогда уравнение $-2=2d(5-d)$ целых корней не имеет. Следовательно, $d(d-5)\ge 0\rightarrow 1\le d\le 5$.

$d=1\rightarrow 3a_2^2-5a_2-8=0.$ Целый корень $a_2=-1$

$d=2\rightarrow 3a_2^2-5a_2-12=0.$ Целый корень $a_2=3$

$d=3\rightarrow 3a_2^2-5a_2-12=0.$ Целый корень $a_2=3$

$d=4\rightarrow 3a_2^2-5a_2-8=0.$ Целый корень $a_2=-1$

$d=5\rightarrow 3a_2^2-5a_2-8=0.$ Целый корень $a_2=0$

Задача 4 Ответ: $\begin{cases}x=81\\ y=3\end{cases}$, $\begin{cases}x=96\\ y=2\end{cases}$, $\begin{cases}x=33\\ y=11\end{cases}$, $\begin{cases}x=60\\ y=5\end{cases}$

Задача 5 Ответ: $n_{\max}=6$

Решение: Пусть $(x;y)$ - ненулевое решение. Разделим первое уравнение на второе:

$\frac{2}{3}\left(\frac{x}{y}+\frac{y^2}{x^2}\right)=\frac{9}{2}\cdot\frac{y/x}{1+y/x}$. Замена $u=\frac{y}{x}$ и уравнение принимает вид:

$$\frac{1}{u}+u^2=\frac{27}{4}\cdot\frac{u}{u+1}\leftrightarrow 4u^4+4u^3-27u^2+4u+4=0, u\ne 0, u\ne -1$$

$$4\left(u^2+\frac{1}{u^2}\right)+4\left(u+\frac{1}{u}\right)-27=0.$$

Замена $t=u+\frac{1}{u}\rightarrow 4t^2+4t-35=0\rightarrow t_1=\frac{5}{2},\ t_2=-\frac{7}{2}$

1 случай. $t=\frac{5}{2}\rightarrow\left[\begin{array}{l}u=2\\ u=0,5\end{array}\right.$

Из второго уравнения системы $xy=\frac{2n}{3}\left(1+u\right)$, с учетом $\frac{y}{x}=u$, получим:

$x^2=\frac{2n}{3}\cdot\frac{1+u}{u}=\frac{2n}{3}\left(\frac{1}{u}+1\right)=\frac{2n}{3}\left(\frac{7}{2}-u\right)$. Тогда

$$x^2+y^2=(1+u^2)x^2=\frac{5u}{2}x^2=\frac{5n}{3}\left(\frac{7}{2}u-u^2\right)=\frac{5n}{3}\left(\frac{7}{2}u+1-tu\right)=$$

$$=\frac{5n}{3}\left(u+1\right)\le 16\rightarrow n\le\frac{48}{5\left(u+1\right)}$$

При минимальном $u=\frac{1}{2}$ получим $n\le\frac{32}{5}\rightarrow n_{\max}=6$

2 случай. $t=-\dfrac{7}{2}\to\ u_3=-\dfrac{7+\sqrt{33}}{4},\ u_4=\dfrac{\sqrt{33}-7}{4}$

$$x^2=\frac{2n}{3}\left(1-\frac{7}{2}-u\right)=-\frac{2n}{3}\left(u+\frac{5}{2}\right)$$

$$x^2+y^2=\left(1+u^2\right)x^2=-\frac{7u}{2}x^2=\frac{7n}{3}\left(u^2+\frac{5}{2}u\right)=\frac{7n}{3}\left(-\frac{7}{2}u-1+\frac{5}{2}u\right)=$$

$$=-\frac{7n}{2}(u+1)\le 16$$

При $u=u_3$ неравенству удовлетворяют $n\le\dfrac{16\cdot 8}{7\left(3+\sqrt{33}\right)}\approx 2{,}1$

При $u=u_4$ допустимые n отрицательные.

Ответ: $n_{\max}=6$

Задача 6 Ответ: $S_{\max}=\dfrac{25+24\sqrt{2}}{4}$