Ответы и решения

Задача 1

Ответ: 1) $y \in \left(-\infty; \frac{5}{2}\right) \cup \left[\frac{11}{2}; 7\right]$; 2) $x_{\max} = 12$.

Решение. Пусть $x_1 = y,\ x_2 = 2y - 1,\ x_3 = 15 - 2y$ - корни числителя и знаменателя.

Случай кратных корней.

Если $x_1 = x_2$, то $y = 2y-1 \to y=1$ и неравенство имеет вид: $\frac{(x-1)^2}{x-13} \le 0$. Его решения $x \in (-\infty;13)$ содержат отрезок $[7;10]$. Если $x_1 = x_3$, то $y = 15-2y \to y=5$ и неравенство имеет вид $\frac{(x-5)(x-9)}{(x-5)} \le 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x \le 9 \\ x \ne 5 \end{cases}$. Его решения не содержат отрезка $[7;10]$.

Если $x_2 = x_3 \to 2y-1 = 15-2y$ и $y=4$, то неравенство примет форму $\frac{(x-4)(x-7)}{(x-7)} \le 0$. Его

решения $x \in (-\infty;4]$ не содержат отрезка $[7;10]$.

Случай различных корней.

Нужный знак неравенства на отрезке $[7;10]$ реализуется в случае а) все три корня не меньше 10 ; в) один из корней больше 10, а два других меньше 7 (нечетное число корней правее 10).

Случай а) не реализуется, поскольку система $\begin{cases} y \ge 10 \\ 2y-1 \ge 10 \\ 15-2y \ge 10 \to y \le 2,5 \end{cases}$ несовместна.

Случай в) распадается на три варианта:

1.в. $x_1 \ge 10,\ x_2 \le 7, x_3 < 7$

Соответствующая система $\begin{cases} y \ge 10 \\ 2y-1 \le 7 \to y \le 4 \\ 15-2y < 7 \end{cases}$ несовместная.

2.в. $x_2 \ge 10,\ x_1 \le 7, x_3 < 7$

Соответствующая система $\begin{cases} 2y-1 \ge 10 \to y \ge 5,5 \\ y \le 7 \\ 15-2y < 7 \to y > 4 \end{cases}$ совместная и имеет решения: $y \in \left[\frac{11}{2};7\right]$.

3.в. $x_3 > 10,\ x_1 \le 7, x_2 \le 7$

Соответствующая система $\begin{cases} 15-2y > 10 \to y < 2,5 \\ y \le 7 \\ 2y-1 \le 7 \to y \le 4 \end{cases}$ совместная и имеет решения: $y \in \left(-\infty;\frac{5}{2}\right)$. Допустимое значение $y=1$ принадлежит этому интервалу.

Задача 2

Ответ: 1) $x \in \left(-\frac{\pi}{3}+2\pi k; 2\pi k\right) \cup \left(\frac{\pi}{3}+2\pi k; \frac{\pi}{2}+2\pi k\right), k \in Z$

2) $x = \pm \arccos\frac{1}{5}+2\pi k, \quad x = \pm \arccos\frac{1}{3}+2\pi k, k \in Z$

Решение.

1) Последовательность убывающая в двух случаях: а) $b_1 > 0, 0 < q < 1$ и в) $b_1 < 0,\ q > 1$

Случай а) приводит к системе неравенств: $\begin{cases} \sin x > 0 \\ 0 < 2\cos x < 1 \end{cases} \to x \in \left(\frac{\pi}{3} + 2\pi k; \frac{\pi}{2} + 2\pi k\right), k \in Z$

Случай в) приводит к системе неравенств: $\begin{cases} \sin x < 0 \\ 2\cos x > 1 \end{cases} \to x \in \left(-\frac{\pi}{3} + 2\pi k; 2\pi k\right), k \in Z$

2) Условие задачи приводит к системе:

$$\begin{cases} |2\cos x| < 1 \\ \dfrac{\sin x}{1 - 2\cos x} = 8ctgx \end{cases} \to \begin{cases} |\cos x| < 0,5 \\ 15\cos^2 x - 8\cos x + 1 = 0 \end{cases} \to \left[\begin{array}{l} \cos x = \dfrac{1}{3} \\ \cos x = \dfrac{1}{5} \end{array}\right.$$

Задача 3

Ответ: 1972

Решение. Искомое число $A = 1000x + 100y + 10z + u$, где x, y, z, u – цифры. Условие 3) Запишется в форме $999u - 90y + 90z - 999x = 819$ или $111u - 10(y - z) - 111x = 91$.

По условию 1) $y - z = u$ и переменные x и u связаны соотношением $101u - 111x = 91$. Это бывает, если $u - x = 1$. Тогда $u = 2$, $x = 1$, а другие цифры из условия 2) $y = 9$, $z = 7$ и $A = 1972$.

Задача 4

Ответ: $\left[\begin{array}{l} x = 1 \\ y = 6 \end{array}\right.$ $\left[\begin{array}{l} x = 5 \\ y = 1 \end{array}\right.$ $\left[\begin{array}{l} x = 8 \\ y = 6 \end{array}\right.$

Решение. Последняя цифра $y = 5k + 1$, $k \in Z$, т.е. всего две возможности $y = 1$ или $y = 6$.

Если $y = 1$, то число $\overline{2345x1} = 234500 + 10x + 1 = 7k + 2, k \in Z$ или

$7k = 23499 + 10x = 33499 \cdot 7 + 6 + 10x$. Последнее бывает только при $x = 5$.

Если $y = 6$, то $\overline{2345x6} = 234500 + 10x + 6 = 7k + 2, k \in Z$ или $7k = 234504 + 10x = 33500 \cdot 7 + 4 + 10x$.

Последнее возможно при $x = 1$ или $x = 8$

Задача 5

Ответ: $a = \frac{1}{2} + k$, $k = -3; -2, 3; 4; 5$

Решение. Уравнение $|\sin \pi a| = 1$ имеет решения $a = k + \frac{1}{2}, k \in Z$. Неравенство

$a^2 - 10a + 24 < 0 \to (a - 4)(a - 6) < 0 \to \left(k - 3\frac{1}{2}\right)\left(k - 5\frac{1}{2}\right) < 0 \to$

$k = 4$ или $k = 5$

Для $k = 4$ и $a = \frac{9}{2}$ неравенство $\log_x\left(a^2 - 2a - 3\right) > 1 \Leftrightarrow \log_x \frac{33}{4} > \log_x x$ имеет на отрезке $\left[\frac{9}{4}; 12\right]$ решения, для которых $x < \frac{33}{4}$.

Для $k = 5$ и $a = \frac{11}{2}$ неравенство $\log_x\left(a^2 - 2a - 3\right) > 1 \Leftrightarrow \log_x \frac{65}{4} > \log_x x$ имеет на отрезке $\left[\frac{9}{4}; 12\right]$ решения, для которых $x < \frac{65}{4}$.

Для $k \neq 4,5$ знаменатель дроби $a^2 - 10a + 24 > 0$ и неравенство выполняется, если

$\log_x\left(a^2-2a-3\right)<1 \Leftrightarrow \log_x\left(k^2-k-\frac{7}{2}\right)<\log_x x$. Последнее неравенство имеет решение на отрезке $\left[\frac{9}{4};12\right]$, если $\begin{cases} k^2-k-3\frac{1}{2}>0 \\ k^2-k-3\frac{1}{2}<12 \end{cases} \to k\in\left(\frac{1-3\sqrt{7}}{2};\frac{1-\sqrt{15}}{2}\right)\cup\left(\frac{1+\sqrt{15}}{2};\frac{1+3\sqrt{7}}{2}\right)$.

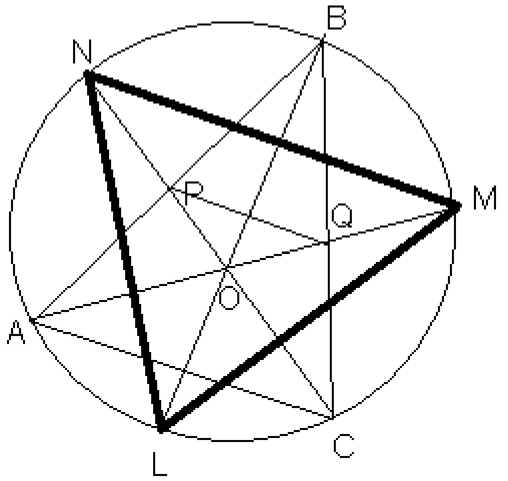
$\to k=\pm 3,-2$

Ответ: $a=-\frac{5}{2};-\frac{3}{2};\frac{7}{2};\frac{9}{2};\frac{11}{2}$

Задача 6

Ответ: $S_{MNL}=\frac{27\sqrt{15}}{80}$

Решение.



$NP\cdot m_c=\frac{c^2}{4}$, $m_c^2=\frac{2a^2+2b^2-c^2}{4} \to NP=\frac{c^2}{4m_c}$, $MQ=\frac{a^2}{4m_a}$

$S_{POQ}=\frac{S_{ABC}}{12}$, $\frac{S_{POQ}}{S_{OMN}}=\frac{m_c/3}{m_c/3+NP}\cdot\frac{m_a/3}{m_a/3+MQ}=\ldots=\frac{(2a^2+2b^2-c^2)(2b^2-2c^2-a^2)}{4\left(a^2+b^2+c^2\right)^2}$

$$S_{OMN}=\frac{\left(a^2+b^2+c^2\right)^2}{3\left(2a^2+2b^2-c^2\right)\left(2b^2+2c^2-a^2\right)}S_{ABC}$$

Аналогично,

$$S_{ONL}=\frac{\left(a^2+b^2+c^2\right)^2}{3\left(2a^2+2b^2-c^2\right)\left(2a^2+2c^2-b^2\right)}S_{ABC},\quad S_{OLM}=\frac{\left(a^2+b^2+c^2\right)^2}{3\left(2a^2+2c^2-b^2\right)\left(2b^2+2c^2-a^2\right)}S_{ABC}$$

Объединяя полученное:

$$S_{NML}=\frac{1}{3}\left(a^2+b^2+c^2\right)^2\left(A\cdot C+B\cdot C+A\cdot B\right)\cdot S_{ABC},$$

где $A=\frac{1}{2b^2+2c^2-a^2}$, $B=\frac{1}{2a^2+2c^2-b^2}$, $C=\frac{1}{2a^2+2b^2-c^2}$.

Здесь a,b,c - стороны треугольника ABC, его площадь удобно вычислять по формуле Герона.