Ответы и решения

Задача 1 Ответ: $x \in (-\infty;-2) \cup (3;6)$

Задача 2 Ответ: $R_1 = \frac{b\sqrt{2}}{2}$, $R_{2,3} = \frac{b}{2}\sqrt{\frac{32 \pm 2\sqrt{22}}{23 \pm 2\sqrt{22}}}$ (знаки в числителе и знаменателе одинаковые)

Задача 3 Ответ: $\sum_{\min} = 42$ при $a = 6, b = 11, c = 12, d = 13$

Решение.

$d=\dfrac{5(a+b+c)-bc}{a-5}$.

Ограничения: $c<d\to c<\dfrac{5(a+b+c)-bc}{a-5}\to c<\dfrac{5(a+b)}{a+b-10}$

$b<c\to b<\dfrac{5(a+b)}{a+b-10}\to a<\dfrac{b(15-b)}{b-5}$

$5<a\to 5<\dfrac{b(15-b)}{b-5}\to b^2-10b-25<0\to a<b<5\left(1+\sqrt{2}\right)\approx 12,07$

Выражение суммы через a,b,c:

$\sum=a+b+c+d=a+b+c+\dfrac{5(a+b+c)-bc}{a-5}=\dfrac{a(a+b)-c(b-a)}{a-5}$.

Замечание:

1. сумма уменьшается с увеличением b при фиксированном a и допустимом c.

2. сумма уменьшается при увеличении c при фиксированных a и b и допустимых (целых) d.

Случай 1. $a=6\to b\in[7;12]$. Для всех $b\in[7;11]$ существуют допустимые c и d. При $b=12\to c<\dfrac{5\cdot 18}{8}=11,25$ и допустимые c отсуствуют.

$\sum_{\min}=42$ достигается при $a=6,\ b=11,\ c=12,\ d=13$

Случай 2. $a=7\to b\in[8;12]$. Для $b\in[8;9]$ существуют допустимые c и d.

$\sum_{\min}=43$ достигается при $a=7,\ b=9,\ c=13,\ d=14$

Случай 3. $a=8\to b\in[9;12]$ допустимых значений c и d нет.

Случай 4. $a=9\to b\in[10;12]$ допустимых значений c и d нет.

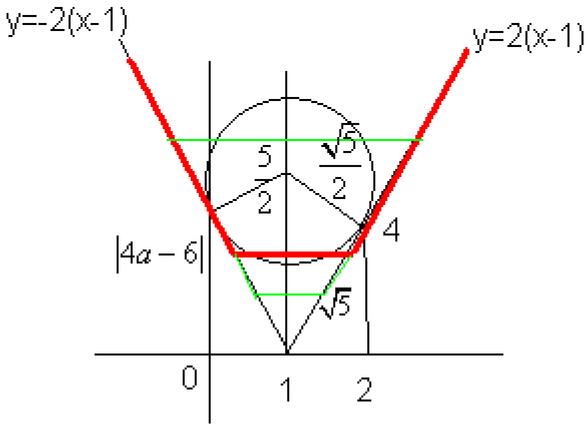
Случай 5. $a=10\to b\in[11;12]$ допустимых значений c и d нет.

Случай 6. $a=11\to b=12$ допустимых значений c и d нет.

Задача 4 Ответ: $a_1=-2,\ a_2-8,\ a_{3,4}=\dfrac{1\pm\sqrt{65}}{8},\ a_{5,6}=\dfrac{-4\pm\sqrt{14}}{2}$

Задача 5 Ответ: $a\in\left(\dfrac{-11-\sqrt{5}}{4};-\dfrac{5}{2}\right]\cup\left(\dfrac{\sqrt{5}-17}{8};\dfrac{-\sqrt{5}-7}{8}\right)\cup\left[-\dfrac{1}{2};\dfrac{\sqrt{5}-1}{4}\right)$

Решение.



Окружность имеет центр в точке $\left(1;\frac{5}{2}\right)$ и радиус $r=\frac{\sqrt{5}}{2}$. Она касается прямых $y=2(x-1)$ и $y=-2(x-1)$ в точках $(2;4)$ и $(0;4)$. Второе уравнение задает ломаную, совпадающую с этими прямыми при $|x-1|\geq|2a+3|$ для любого a. Для $|x-1|<|2a+3|$ она совпадает с горизонтальной прямой $y=|4a+6|$. Два решения уравнения обеспечивает условие $|4a+6|<\frac{5-\sqrt{5}}{2}\rightarrow a\in\left(\frac{\sqrt{5}-17}{8};-\frac{7+\sqrt{5}}{8}\right)$ или

$$4\leq|4a+6|<\frac{5+\sqrt{5}}{2}\rightarrow a\in\left(-\frac{\sqrt{5}+11}{4};-\frac{5}{2}\right]\cup\left[-\frac{1}{2};\frac{\sqrt{5}-1}{4}\right)$$

Задача 6 Ответ: $2p=\frac{143}{24}$