Решения типового варианта

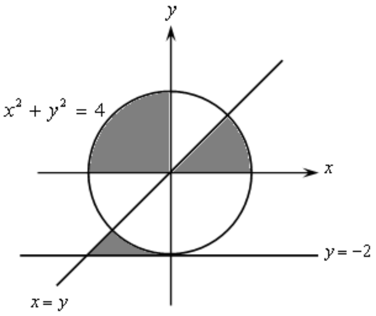
Задача 1 (8 баллов). Переведите шестнадцатеричное число A_{16} = 32AB,C1 в десятичную систему счисления. Ответ можно дать с точностью до 3-го знака после запятой.

Решение:

32AB,C1 = $3*16^3 + 2*16^2 + 10*16^1 + 11*16^0 + 12*16^{-1} + 1*16^{-2}$ = 12288 + 512 + 160 + 11 + 0,75 + 0,00390635 = 12971 + 0,75390625 = 12971,75390625.

Ответ: 12971,75390625.

Задача 2 (8 баллов). На любом языке программирования запишите условие, которое является истинным, когда точка с координатами *x*, *y* попадает в заштрихованные участки плоскости, включая их границы.



Решение (на языке Си):

```
((x <= 0) && (y >= 0) && ((x*x + y*y) <= 4)) ||
((x >= 0) && (y >= 0) && ((x*x + y*y) <= 4) && (y <= x)) ||
((x <= 0) && (y <= 0) && (y >= -2) && ((x*x + y*y) >= 4) && (y <= x))
```

Задача 3 (8 баллов). Дано выражение, в котором используются поразрядные операции над 8-ми разрядными целыми числами без знака. Вычислить значение следующего выражения: (~a | a << 1 & a >> 1) & ((a | b) >> 1 | (a & b) << 1) для a = 15 и b = 136. Ответ дать в двоичной и десятичной формах.

Решение:

1) a = $15_{10} = 00001111_2$
2) b = $136_{10} = 10001000_2$
3) ~a = 11110000_2
4) a << 1 = 00011110_2
5) a >> 1 = 00000111_2
6) a << 1 & a >> 1 = 00000110_2
7) ~a | a << 1 & a >> 1 = 11110110_2

8) a | b = 10001111_2

9) (a | b) >> 1 = 01000111_2

10) a & b = 00001000_2

11) (a & b) << 1 = 00010000_2

12) (a | b) >> 1 | (a & b) << 1 = 01010111_2

13) (~a | a << 1 & a >> 1) & ((a | b) >> 1 | (a & b) << 1) = $01010110_2 = 86_{10}$.

Ответ: $01010110_2 = 86_{10}$.

Задача 4 (8 баллов). На книжной полке расположены книги по математике, физике, информатике и химии. Какая книга будет выбрана при одновременном выполнении следующих условий: a) если не выбирается химия, то не выбирается физика; b) не верно, что если выбирается информатика, то выбирается химия; c) если выбирается математика, то выбирается физика.

Решение:

Введем следующие обозначения: M – математика, P – физика, I – информатика, C – химия.

Используя элементарные функции алгебры логики, запишем условие задачи в аналитической форме:

f(M, P, I, C) = (□C → □P) ∧ □ (I → C) ∧ (M → P).

Используя свойства функций алгебры логики, выполним преобразования:

(□C → □P) ∧ □ (I → C) ∧ (M → P) =

(□□C ∨ □P) ∧ □ (□I ∨ C) ∧ (□M ∨ P) =

(C ∨ □P) ∧ (□□I ∧ □C) ∧ (□M ∨ P) =

(C ∨ □P) ∧ (I ∧ □C) ∧ (□M ∨ P) =

(C ∧ I ∧ □C ∨ □P ∧ I ∧ □C) ∧ (□M ∨ P) =

(□P ∧ I ∧ □C) ∧ (□M ∨ P) =

(□P ∧ I ∧ □C ∧ □M ∨ P□ ∧ P ∧ I ∧ □C) =

(□P ∧ I ∧ □C ∧ □M).

Функция f(M, P, I, C) равна единице при следующих значениях переменных: M = 0, P = 0, I = 1, C = 0.

Ответ: Информатика.

Задача 5 (8 баллов). Сколько существует положительных целых чисел между 1 и 2003, которые a) Делятся на 6? b) Делятся на 7? c) Делятся на 8? d) Делятся на 6 или 7 или 8?

Ответ: a) 333; b) 286; c) 250; d) 715.

Задача 6 (8 баллов). Дана постфиксная (обратная польская) запись арифметического выражения: a x b x c x d x e x + * + * + * + * +. Постройте бинарное дерево, задающее это выражение, и с помощью алгоритма центрированного обхода дерева вручную вычислите значение этого выражения для x=3, a=1, b=2, c=3, d=4, e=5.

Решение:

Линейная форма представления бинарного дерева выражения будет иметь вид: (a+(x*(b+(x*(c+(x*(d+(x*(e+x))))))))). Для наглядности дерево можно изобразить по правилу «корень вверху, листья внизу». Подставляя значения, получим (1+(3*(2+(3*(3+(3*(4+(3*(5+3))))))))) = 790.

Ответ: 790.

Задача 7 (12 баллов). Функция A определена рекурсивно для неотрицательных целых чисел m и n следующим образом:

A(0, n) = n+1; A(m, 0) = A(m-1, 1), если m > 0; A(m, n) = A(m-1, A(m, n-1)), если n, m > 0. Вычислить вручную значение A(3, 2).

Решение:

1) A(0, 0) = 1;
   A(0, 1) = 2;
   A(0, 2) = 3;
   …
   A(0, n) = n+1;
2) A(1, 0) = A(0, 1) = 2;
   A(1, 1) = A(0, A(1, 0)) = A(0, 2) = 3;
   A(1, 2) = A(0, A(1, 1)) = A(0, 3) = 4;
   …
   A(1, n) = A(0, A(1, n–1)) = A(0, n+1) = n+2;
3) A(2, 0) = A(1, 1) = 3
   A(2, 1) = A(1, A(2, 0)) = A(1, 3) = 5;
   A(2, 2) = A(1, A(2, 1)) = A(1, 5) = 7;
   …
   A(2, n) = A(1, A(2, n-1)) = 2*n+3;
4) A(3, 0) = A(2, 1) = 5;
   A(3, 1) = A(2, A(3, 0)) = A(2, 5) = 2*5+3 = 13;
   A(3, 2) = A(2, A(3, 1)) = A(2, 13) = 2*13+3 = 29.

Для наглядности результаты вычислений представим в табличной форме

m\n	0	1	**2**	3	4	5
0	1	2	3	4	5	6
1	2	3	4	5	6	7
2	3	5	7	9	11	13
3	5	13	**29**			

Ответ: A(3, 2) = 29.

Задача 8 (12 баллов). Укажите наибольшее целое число X, при котором логическое выражение $(10 < X \cdot (X+1)) \rightarrow (10 > (X+1) \cdot (X+2))$ истинно.

Решение:

1) это операция импликации между двумя отношениями: $A_0 = (10 < X \cdot (X+1))$ и $B_0 = (10 > (X+1) \cdot (X+2))$;
2) заметим, что по условию нас интересуют только целые числа, поэтому можно попытаться как-то преобразовать исходное выражение, получив равносильное высказывание (точные значения корней нас совершенно не интересуют!);
3) рассмотрим неравенство $A_0 = (10 < X \cdot (X+1))$: очевидно, что X может быть как положительным, так и отрицательным числом;
4) легко проверить, что в области X >= 0 высказывание A_0 истинно при всех целых X >= 3, а в области X <= 0 – при всех целых X <= -4 (чтобы не запутаться, удобнее использовать нестрогие неравенства);
5) поэтому для целых X можно заменить A_0 на равносильное выражение A = (X <= -4) + (X >= 3);
6) область истинности выражения – объединение двух бесконечных интервалов;
7) теперь рассмотрим второе неравенство $B_0 = (10 > (X+1) \cdot (X+2))$: очевидно, что X так же может быть как положительным, так и отрицательным числом;
8) в области X >= 0 высказывание B_0 истинно при всех целых X <= 1, а в области X <= 0 – при всех целых X >= -4, поэтому для целых X можно заменить B_0 на равносильное выражение B = (-4 <= X <= 0) + (0 <= X <= 1) = (-4 <= X <= 1);
9) область истинности выражения – закрытый интервал; вспомним таблицу истинности операции «импликация»:

A	B	A → B
0	0	1
0	1	1
1	0	0
1	1	1

Согласно таблице, заданное выражение истинно везде, кроме областей, где A = 1и B = 0.

10) обратите внимание, что значение 3 уже не входит в эту область, потому что там A = 1и B = 0, то есть импликация дает 0;

11) максимальное целое число в этой области будет 2.

Ответ: 2.

Задача 9 (12 баллов). Выпишите состояние массива **a** в конце выполнения следующей программы:

<table>
<tr><th>Pascal</th><th>C</th></tr>
<tr><td>

```
const n=9;
var a: array[0..n-1] of integer = (7, 3, 9, 4, 2, 5, 6, 1,
8);
var i, first, p, v, t: integer;
begin
  first:=0; p:=first; v:=a[first];
  for i:=first+1 to n-1 do
    if (a[i]<v) then
    begin p:=p+1; t:=a[i]; a[i]:=a[p]; a[p]:=t; end;
  t:=a[first]; a[first]:=a[p]; a[p]:=t;
end.
```

</td><td>

```
const int n = 9;
int a[n] = {7, 3, 9, 4, 2, 5, 6, 1, 8};
int main() {
  int i, first, p, v, t;
  first=0; p=first; v=a[first];
  for (i=first+1; i<n; i++)
    if (a[i]<v) { p++; t=a[i]; a[i]=a[p]; a[p]=t; }
  t=a[first]; a[first]=a[p]; a[p]=t;
  return 0;
}
```

</td></tr>
</table>

Решение:

Выпишем состояние массива **a** после каждого прохода **for**-цикла:

1-й проход: 7 3 9 4 2 5 6 1 8

2-й проход: 7 3 9 4 2 5 6 1 8

3-й проход: 7 3 4 9 2 5 6 1 8

4-й проход: 7 3 4 2 9 5 6 1 8

5-й проход: 7 3 4 2 5 9 6 1 8

6-й проход: 7 3 4 2 5 6 9 1 8

7-й проход: 7 3 4 2 5 6 1 9 8

8-й проход: 7 3 4 2 5 6 1 9 8

После выхода из **for**-цикла переменная **p** равна 6, и выполняется последняя перестановка элементов, после которой состояние массива **a** будет таким: 1 3 4 2 5 6 7 9 8.

Ответ: 1, 3, 4, 2, 5, 6, 7, 9, 8.

Задача 10 (16 баллов). Постройте матрицу **D** после выполнения следующей программы и выпишите элементы ее главной диагонали:

Pascal	C

const n=5;
var D: array[0..n-1,0..n-1] of integer;
var i, j, k, l: integer;
begin
k:=0; l:=0;
for i:=0 to n-1 do
for j:=0 to n-1 do
if ((i+j) mod 2 <> 0) then
begin k:=k-1; D[i,j]:=k; end
else begin l:=l+1; D[i,j]:=l; end;
for k:=0 to 1 do
for j:=0 to n-1 do
for i:=0 to n-1 do
D[i,j]:=min(D[i,j], D[i,k]+D[k,j]);
end.
	#define MIN(X,Y) ((X) < (Y) ? (X) : (Y))
	const int n=5;
	int D[n][n];
	int main() {
	int i, j, k=0, l=0;
	for (i=0; i<n; i++)
	for (j=0; j<n; j++)
	if ((i+j) % 2 != 0) D[i][j]=--k;
	else D[i][j]=++l;
	for (k=0; k<2; k++)
	for (j=0; j<n; j++)
	for (i=0; i<n; i++)
	D[i][j]=MIN(D[i][j], D[i][k]+D[k][j]);
	return 0;
	}

Решение:

После инициализации матрица **D** будет иметь вид:

1	-1	2	-2	3
-3	4	-4	5	-5
6	-6	7	-7	8
-8	9	-9	10	-10
11	-11	12	-12	13

Для **k=0** матрица **D** будет иметь вид:

1	-1	2	-2	3
-3	-4	-4	-5	-5
6	-6	7	-7	8
-8	-9	-9	-10	-10
11	-11	12	-12	13

Для **k=1** матрица **D** будет иметь вид:

-4	-5	-9	-10	-10
-7	-8	-12	-13	-13
-13	-14	-26	-27	-27
-16	-17	-29	-30	-30
-18	-19	-31	-32	-32

В конце программы матрица **D** будет иметь вид:

-4	-5	-9	-10	-10
-7	-8	-12	-13	-13
-13	-14	-26	-27	-27
-16	-17	-29	-30	-30
-18	-19	-31	-32	-32

Ответ: -4 -8 -26 -30 -32.

Решения варианта 1

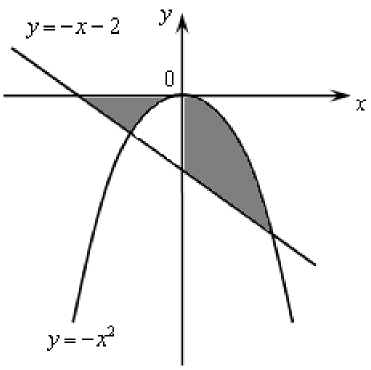
Задача 1 (8 баллов). Переведите шестнадцатеричное число A_{16} = 32AB,12 в десятичную систему счисления. Ответ можно дать с точностью до 3-го знака после запятой.

Решение.

32AB,12 = $3*16^3 + 2*16^2 + 10*16^1 + 11*16^0 + 1*16^{-1} + 2*16^{-2}$ = 12288 + 512 + 160 + 11 + 0,0625 + 0,0078125 = 12971 + 0,0703125 = 12971,0703125.

Ответ: 12971,0703125.

Задача 2 (8 баллов). На любом языке программирования запишите условие, которое является истинным, когда точка с координатами *x*, *y* попадает в заштрихованные участки плоскости, включая их границы.



Решение.

Используя нотацию, принятую в языке C, будем иметь

((x <= 0) && (y <= 0) && (y >= -x-2) && (y >= -x*x)) ||

((x >= 0) && (y <= 0) && (y >= -x-2) && (y <= -x*x))

Задача 3 (8 баллов). Дано выражение, в котором используются поразрядные операции над 8-ми разрядными целыми числами без знака. В выражении используются круглые скобки и следующие знаки операций: поразрядное НЕ (~), поразрядное И (&), поразрядное ИЛИ (|), поразрядный сдвиг влево (<<), поразрядный сдвиг вправо (>>). Операции имеют следующие уровни приоритета: уровень 1 (~), уровень 2 (<< и >>), уровень 3 (&), уровень 4 (|). Вычислить значение следующего выражения: a >> 2 & b << 1 | ~(a << 2 & b >> 1) для a = 240 и b = 63. Ответ дать в двоичной и десятичной формах.

Решение.

a = $f0_{16} = 11110000_2$

1) b = $3f_{16} = 00111111_2$
2) a >> 2 = $3c_{16} = 00111100_2$

3) $b << 1 = 7e_{16} = 01111110_2$

4) $a >> 2 \& b << 1 = 3c_{16} = 00111100_2$

5) $a << 2 = c0_{16} = 11000000_2$

6) $b >> 1 = 1f_{16} = 00011111_2$

7) $a << 2 \& b >> 1 = 0_{16} = 00000000_2$

8) $\sim(a << 2 \& b >> 1) = ff_{16} = 11111111_2$

9) $a >> 2 \& b << 1 \mid \sim(a << 2 \& b >> 1) = ff_{16} = 11111111_2 = 255_{10}$.

Ответ: $11111111_2 = 255_{10}$.

Задача 4 (8 баллов). Является ли тождественно истинной формула:

$(A \wedge B \rightarrow C) \leftrightarrow ((A \wedge \neg C) \rightarrow \neg B)$.

Ответ: ДА.

Задача 5 (8 баллов). Сколько существует положительных целых чисел, меньших 1001, которые a) делятся и на 2, и на 3, и на 5? b) делятся на 2, или на 3, или на 5? c) не делятся ни на 2, ни на 3, ни на 5?

Решение.

Пусть универсум **U** будет множеством всех неотрицательных целых чисел, меньших 1001. Следовательно, |**U**| = 1001.

Имеется всего $\lfloor 1001/2 \rfloor = 500$ целых чисел, которые делятся на 2.

Имеется всего $\lfloor 1001/3 \rfloor = 333$ целых чисел, которые делятся на 3.

Имеется всего $\lfloor 1001/5 \rfloor = 200$ целых чисел, которые делятся на 5.

Имеется всего $\lfloor 1001/6 \rfloor = 166$ целых чисел, которые делятся на 2 и на 3.

Имеется всего $\lfloor 1001/15 \rfloor = 66$ целых чисел, которые делятся на 3 и на 5.

Имеется всего $\lfloor 1001/10 \rfloor = 100$ целых чисел, которые делятся на 2 и на 5.

Имеется всего $\lfloor 1001/30 \rfloor = 33$ целых чисел, которые делятся на 2 и на 3 и на 5.

Следовательно, количество чисел, которые делятся на 2 или на 3 или на 5, равно 500 + 333 + 200 – 166 – 66 – 100 + 33 = 734. Количество чисел, которые не делятся ни на одно из указанных целых чисел, равно 1001 – 734 = 267.

Ответ: a) 33; b) 734; c) 267.

Задача 6 (8 баллов). Дана постфиксная (обратная польская) запись арифметического выражения:

a b + c – d * e f g h + * – *. Постройте бинарное дерево, задающее это выражение, покажите порядок обхода вершин дерева, позволяющий вычислить значение этого выражения, вычислите значение этого выражения для a=8, b=7, c=6, d=5, e=4, f=3, g=2, h=1.

Решение.

Линейная форма представления бинарного дерева выражения будет иметь вид ((((a+b)-c)*d)*(e-(f*(g+h)))). Для наглядности дерево можно изобразить по правилу «корень вверху, листья внизу». Подставляя значения, получим ((((8+7)-6)*5)*(4-(3*(2+1)))) = -225.

Ответ: -225.

Задача 7 (12 баллов). Функция S определена рекурсивно для неотрицательных целых чисел n и k следующим образом: S(0, 0) = 1; S(n, 0) = 0 для n > 0; S(n, k) = S(n-1, k-1) + k*S(n-1, k) для 0 < k < n. Очевидно, что S(n, 1) = 1 при n > 0; S(n, n) = 1; S(n, k) = 0 при k > n. Вычислить вручную S(6, 3).

Решение.

Производим вычисления по формуле и результаты заносим в таблицу размером 7x7. В итоге будет получен следующий треугольник:

n	k						
	0	1	2	**3**	4	5	6
0	1						
1	0	1					
2	0	1	1				
3	0	1	3	1			
4	0	1	7	6	1		
5	0	1	15	25	10	1	
6	0	1	31	**90**	65	15	1

Ответ: S(6, 3) = 90.

Задача 8 (12 баллов). Сколько различных решений имеет система логических уравнений

$\neg(x_1 \equiv x_2) \wedge \neg(x_1 \equiv x_3) \wedge (x_2 \equiv x_3) = 0$

$\neg(x_3 \equiv x_4) \wedge \neg(x_3 \equiv x_5) \wedge (x_4 \equiv x_5) = 0$

$\neg(x_5 \equiv x_6) \wedge \neg(x_5 \equiv x_7) \wedge (x_6 \equiv x_7) = 0$

$\neg(x_7 \equiv x_8) \wedge \neg(x_7 \equiv x_9) \wedge (x_8 \equiv x_9) = 0$

где x_1, x_2, …, x_9 – логические переменные? В ответе не нужно перечислять все различные наборы значений переменных, при которых выполнены данные равенства. В качестве ответа нужно указать количество таких наборов.

Решение.

1) заметим два важных момента:
   а) все 4 уравнения – однотипные
   б) первое связано со вторым только через переменную $\mathbf{x_3}$, второе с третьим – только через $\mathbf{x_5}$, третье с четвертым – только через $\mathbf{x_7}$
2) разберем подробно одно первое уравнение; поскольку в нем используется операция И (конъюнкция) и правая часть равна нулю (ложное значение), имеет смысл проверить ситуации, когда первое уравнение истинно: это будет тогда, когда $\mathbf{x_2 \equiv x_3}$, а $\mathbf{x_1}$ не равно этому значению, то есть в двух случаях: $(\mathbf{x_1,x_2,x_3})=(1,0,0)$ и $(\mathbf{x_1,x_2,x_3})=(0,1,1)$
3) поскольку логическое уравнение с тремя переменными может иметь не более $8 = 2^3$ решений, вычитаем два решения из этого количества и находим, что первое уравнение имеет $8 – 2 = 6$ решений, причем в трёх из них $\mathbf{x_3} = 0$, а в трёх других $\mathbf{x_3} = 1$.
4) подключаем второе уравнение: для каждого из трёх решений первого при $\mathbf{x_3} = 0$ получаем три решения второго, и для каждого из трёх решений первого при $\mathbf{x_3} = 1$ получаем ещё три решения второго, всего система из двух уравнений имеет 3*3 + 3*3 = 18 решений
5) далее продолжаем таблицу:

число уравнений	решений
1	$3_{(\text{при } \mathbf{x3}=0)} + 3_{(\text{при } \mathbf{x3}=1)} = 6$
2	$3*3 + 3*3 = 9_{(\text{при } \mathbf{x5}=0)} + 9_{(\text{при } \mathbf{x5}=1)} = 18$
3	$9*3 + 9*3 = 27_{(\text{при } \mathbf{x7}=0)} + 27_{(\text{при } \mathbf{x7}=1)} = 54$
4	27*3 + 27*3 = 81 + 81 = 162

Ответ: 162.

Задача 9 (12 баллов).

Pascal

```
var a: array[0..7] of integer;
var j, i1, i2, i3, index: integer;
var   s: array[0..39] of char;
begin
for j := 0 to 7 do a[j] := 0;
s :=
'HHHHHHHHHHHHHHHHHHHHHHHHHHHHHHHHHHHHHHHH';
for j := 0 to 37 do begin
if ( s[j] = 'H' ) then i1 := 4 else i1 := 0;
if ( s[j+1] = 'H' ) then i2 := 2 else i2 :=
0;
if ( s[j+2] = 'H' ) then i3 := 1 else i3 :=
0;
index := i1 + i2 + i3;
inc(a[index]);
end;
for index := 0 to 7 do write(a[index]:5);
writeln;
end.
```

C

```
int a[8] = { 0 };
int main(void)
{
int j, index;
char s[] =
"HHHHHHHHHHHHHHHHHHHHHHHHHHHHHHHHHHHHHHHH";
for (j = 0; j < 38; ++j) {
index = ( s[j] == 'H' ? 4 : 0 )
+ ( s[j+1] == 'H' ? 2 : 0 )
+ ( s[j+2] == 'H' ? 1 : 0 );
a[index]++;
}
for (unsigned index = 0; index < 8; ++index)
printf("%5d", a[index]);
printf("\n");
return 0;
}
```

Ответ: **0 0 0 0 0 0 0 38.**

Задача 10 (16 баллов). Постройте матрицу **D** после выполнения следующей программы и вычислите сумму элементов строго ниже главной диагонали:

Pascal

```
const n=5;
var D: array[0..n-1,0..n-1] of integer;
var i, j, k, l: integer;
begin
k:=0; l:=0;
for i:=0 to n-1 do
for j:=0 to n-1 do
if ((i+j) mod 2 <> 0) then
begin k:=k-1; D[i,j]:=k; end
else begin l:=l+1; D[i,j]:=l; end;
for k:=0 to 1 do
for j:=0 to n-1 do
for i:=0 to n-1 do
D[i,j]:=min(D[i,j], D[i,k]+D[k,j]);
end.
```

C

```
#define MIN(X,Y) ((X) < (Y) ? (X) : (Y))
const int n=5;
int D[n][n];
int main() {
int i, j, k=0, l=0;
for (i=0; i<n; i++)
for (j=0; j<n; j++)
if ((i+j) % 2 != 0) D[i][j]=--k;
else D[i][j]=++l;
for (k=0; k<2; k++)
for (j=0; j<n; j++)
for (i=0; i<n; i++)
D[i][j]=MIN(D[i][j], D[i][k]+D[k][j]);
return 0;
}
```

Решение.

В конце программы матрица D будет иметь вид:

-4	-5	-9	-10	-10
-7	-8	-12	-13	-13
-13	-14	-26	-27	-27
-16	-17	-29	-30	-30
-18	-19	-31	-32	-32

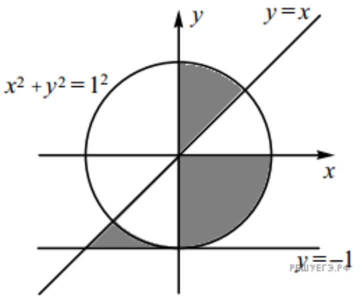
Ответ: **-196**

Решения варианта 2

Задача 1 (8 баллов). Переведите десятичное число A10 = 1876,54625 в шестнадцатеричную систему счисления. Ответ дать с точностью до 4-го знака после запятой.

Ответ: 754,8BD7.

Задача 2 (8 баллов). Запишите условие, которое является истинным, когда точка с координатами x, y попадает в заштрихованные участки плоскости, включая их границы.



Решение.

Используя нотацию, принятую в языке C, будем иметь

((x >= 0) && (y >= 0) && (y >= x) && (x*x + y*y <= 1)) ||

((x >= 0) && (y <= 0) && (x*x + y*y <= 1)) ||

((x <= 0) && (y <= 0 && y >= -1) && (y <= x) && (x*x + y*y >= 1))

Задача 3 (8 баллов). Дано выражение, в котором используются поразрядные операции над 8-ми разрядными целыми числами без знака. В выражении используются круглые скобки и следующие знаки операций: поразрядное НЕ (~), поразрядное И (&), поразрядное ИЛИ (|), поразрядный сдвиг влево (<<), поразрядный сдвиг вправо (>>). Операции имеют следующие уровни приоритета: уровень 1 (~), уровень 2 (<< и >>), уровень 3 (&), уровень 4 (|). Вычислить значение следующего выражения: (b << 2 | b >> 2) | ~((a & b) >> 2 | (a | b) << 2) для a = 60 и b = 195. Ответ дать в двоичной и десятичной формах.

Решение.

1) a = $3c_{16}$ = 00111100_2
2) b = $c3_{16}$ = 11000011_2
3) b << 2 = c_{16} = 00001100_2
4) b >> 2 = 30_{16} = 00110000_2
5) b << 2 | b >> 2) = $3c_{16}$ = 00111100_2
6) a & b = 0_{16} = 00000000_2
7) (a & b) >> 2 = 0_{16} = 00000000_2

8) $a \mid b = ff_{16} = 11111111_2$

9) $(a \mid b) << 2 = fc_{16} = 11111100_2$

10) $(a \& b) >> 2 \mid (a \mid b) << 2) = fc_{16} = 11111100_2$

11) $\sim((a \& b) >> 2 \mid (a \mid b) << 2) = 3_{16} = 00000011_2$

12) $(b << 2 \mid b >> 2) \mid \sim((a \& b) >> 2 \mid (a \mid b) << 2) = 3f_{16} = 00111111_2 = 63_{10}$.

Ответ: $00111111_2 = 63_{10}$

Задача 4 (8 баллов). Упростить логическую функцию:

$(A \rightarrow \neg B) \leftrightarrow (B \wedge (C \rightarrow \neg A))$.

Ответ должен содержать не более трех логических операций.

Ответ: **$B \wedge (\neg A \rightarrow C)$.**

Задача 5 (8 баллов). Сколько существует положительных целых чисел, меньших 2003, которые a) делятся и на 4, и на 5, и на 6? b) делятся или на 4, или на 5, или на 6? c) не делятся ни на 4, ни на 5, ни на 6?

Решение.

Пусть универсум **U** будет множеством всех неотрицательных целых чисел, меньших 2003. Следовательно, $|\mathbf{U}| = 2003$.

Имеется всего $\lfloor 2003/4 \rfloor = 500$ целых чисел, которые делятся на 4.

Имеется всего $\lfloor 2003/5 \rfloor = 400$ целых чисел, которые делятся на 5.

Имеется всего $\lfloor 2003/6 \rfloor = 333$ целых чисел, которые делятся на 6.

Имеется всего $\lfloor 2003/20 \rfloor = 100$ целых чисел, которые делятся на 4 и на 5.

Имеется всего $\lfloor 2003/30 \rfloor = 66$ целых чисел, которые делятся на 5 и на 6.

Имеется всего $\lfloor 2003/12 \rfloor = 166$ целых чисел, которые делятся на 4 и на 6.

Имеется всего $\lfloor 2003/60 \rfloor = 33$ целых чисел, которые делятся на 4 и на 5 и на 6.

Следовательно, количество чисел, которые делятся на 4 или на 5 или на 6, равно 500 + 400 + 333 – 100 – 66 – 166 + 33 = 934. Количество чисел, которые не делятся ни на одно из указанных целых чисел, равно 2003 – 934 = 1069.

Ответ: **a) 33; b) 934; c) 1069.**

Задача 6 (8 баллов). Дана префиксная запись арифметического выражения: * * a + b – d + e f * + g h + i j. Постройте бинарное дерево, задающее это выражение, покажите порядок обхода вершин дерева, позволяющий вычислить значение этого выражения, вычислите значение этого выражения для a=10, b=9, d=7, e=6, f=5, g=4, h=3, i=2, j=1.

Решение.

Линейная форма представления бинарного дерева выражения будет иметь вид: ((a*(b+(d-(e+f))))*((g+h)*(i+j)). Для наглядности дерево можно изобразить по правилу «корень вверху, листья внизу». Подставляя значения, получим ((10*(9+(7-(6+5))))*((4+3)*(2+1)) = 1050.

Ответ: 1050.

Задача 7 (12 баллов). Функция S определена рекурсивно для неотрицательных целых чисел n и k следующим образом: S(0, 0) = 1; S(n, 0) = 0 для n > 0; S(n, k) = S(n-1, k-1) + (n-1)*S(n-1, k) для 0 < k < n. Очевидно, что S(n, n) = 1; S(n, k) = 0 при k > n. Вычислить вручную S(6, 3).

Решение.

Производим вычисления по формуле и результаты заносим в таблицу размером 7х7. В итоге будет получен следующий треугольник:

n	k						
	0	1	2	**3**	4	5	6
0	1						
1	0	1					
2	0	1	1				
3	0	2	3	1			
4	0	6	11	6	1		
5	0	24	50	35	10	1	
6	0	120	274	**225**	85	15	1

Ответ: S(6, 3) = 225.

Задача 8 (12 баллов). Сколько различных решений имеет система логических уравнений

$(x_1 \to x_2) \wedge (x_2 \to x_3) = 1$

$\neg x_1 \wedge y_1 \wedge z_1 \vee x_1 \wedge \neg y_1 \wedge z_1 \vee x_1 \wedge y_1 \wedge \neg z_1 = 1$

$\neg x_2 \wedge y_2 \wedge z_2 \vee x_2 \wedge \neg y_2 \wedge z_2 \vee x_2 \wedge y_2 \wedge \neg z_2 = 1$

$\neg x_3 \wedge y_3 \wedge z_3 \vee x_3 \wedge \neg y_3 \wedge z_3 \vee x_3 \wedge y_3 \wedge \neg z_3 = 1$

где $x_1, \ldots, x_3, y_1, \ldots, y_3, z_1, \ldots, z_3$ – логические переменные? В ответе не нужно перечислять все различные наборы значений переменных, при которых выполнены данные равенства. В качестве ответа нужно указать количество таких наборов.

Решение.

1) перепишем уравнения с помощью более простых обозначений:

$$(x_1 \to x_2) \cdot (x_2 \to x_3) = 1$$

$$\bar{x}_1 \cdot y_1 \cdot z_1 + x_1 \cdot \bar{y}_1 \cdot z_1 + x_1 \cdot y_1 \cdot \bar{z}_1 = 1$$

$$\bar{x}_2 \cdot y_2 \cdot z_2 + x_2 \cdot \bar{y}_2 \cdot z_2 + x_2 \cdot y_2 \cdot \bar{z}_2 = 1$$

$$\bar{x}_3 \cdot y_3 \cdot z_3 + x_3 \cdot \bar{y}_3 \cdot z_3 + x_3 \cdot y_3 \cdot \bar{z}_3 = 1$$

2) заметим, что последние 3 уравнения независимы друга от друга, и вся система связана только через первое уравнение

3) рассмотрим второе уравнение

$$\bar{x}_1 \cdot y_1 \cdot z_1 + x_1 \cdot \bar{y}_1 \cdot z_1 + x_1 \cdot y_1 \cdot \bar{z}_1 = 1$$

оно имеет три решения, каждое из которых соответствует единичному значению одного из слагаемых:

$$\bar{x}_1 \cdot y_1 \cdot z_1 = 1 \quad \Rightarrow \quad (x_1, y_1, z_1) = (0,1,1)$$
$$x_1 \cdot \bar{y}_1 \cdot z_1 = 1 \quad \Rightarrow \quad (x_1, y_1, z_1) = (1,0,1)$$
$$x_1 \cdot y_1 \cdot \bar{z}_1 = 1 \quad \Rightarrow \quad (x_1, y_1, z_1) = (1,1,0)$$

4) аналогичные уравнения 3-4 тоже имеют по три решения
5) теперь рассмотрим множество решений системы уравнений 2-3

$$\bar{x}_1 \cdot y_1 \cdot z_1 + x_1 \cdot \bar{y}_1 \cdot z_1 + x_1 \cdot y_1 \cdot \bar{z}_1 = 1$$
$$\bar{x}_2 \cdot y_2 \cdot z_2 + x_2 \cdot \bar{y}_2 \cdot z_2 + x_2 \cdot y_2 \cdot \bar{z}_2 = 1$$

при ограничении, которое накладывается первым уравнением:

$$(x_1 \to x_2) = 1$$

6) поскольку импликация дает ложное значение (0) только для случая 1→0, первое уравнение в исходной системе запрещает комбинацию $(x_1, x_2) = (1,0)$.

7) рассмотрим решение уравнений 2 и 3:

(x_1, y_1, z_1)	(x_2, y_2, z_2)
(0,1,1) (1,0,1) (1,1,0)	(0,1,1) (1,0,1) (1,1,0)

Эти уравнения независимы, поэтому система уравнений 2-3 (без дополнительных ограничений) имеет 3·3=9 решений

При ограничении $(x_1 \to x_2) = 1$:

- в случае $(x_2, y_2, z_2) = (0,1,1)$ имеем только одно решение системы, когда $x_1 = 0$ в уравнении 2, то есть $(x_1, y_1, z_1) = (0,1,1)$
- для двух решений уравнения 3, когда $x_2 = 1$, подходят все 3 отдельных решения уравнения 2

поэтому количество решений системы уравнений 2-3 при ограничении $(x_1 \to x_2) = 1$ вычисляется как 1 + 3 + 3 = 7 решений

8) рассуждая аналогично, подключаем уравнение 4 и ограничение $(x_2 \to x_3) = 1$, получаем, что количество решений системы уравнений 2-4 при ограничении $(x_1 \to x_2) \cdot (x_2 \to x_3) = 1$ вычисляется как 1 + 7 + 7 = 15 решений

Ответ: 15.

Задача 9 (12 баллов). Определите, что будет напечатано в результате выполнения следующей программы:

Pascal

```
var a: array[0..7] of integer;
var j, i1, i2, i3, index: integer;
var    s: array[0..39] of char
begin
for j := 0 to 7 do a[j] := 0;
s :=
'TTTTTTTTTTTTTTTTTTTTTTTTTTTTTTTTTTTTTTTT';
for j := 0 to 37 do begin
if ( s[j] = 'H' ) then i1 := 4 else i1 := 0;
if ( s[j+1] = 'H' ) then i2 := 2 else i2 :=
0;
if ( s[j+2] = 'H' ) then i3 := 1 else i3 :=
0;
```

C

```
int a[8] = { 0 };
int main(void)
{
int j, index;
char s[] =  "
TTTTTTTTTTTTTTTTTTTTTTTTTTTTTTTTTTTTTTTT";
for (j = 0; j < 38; ++j) {
index = ( s[j] == 'H' ? 4 : 0 )
+ ( s[j+1] == 'H' ? 2 : 0 )
+ ( s[j+2] == 'H' ? 1 : 0 );
a[index]++;
}
for (unsigned index = 0; index < 8; ++index)
```

`index := i1 + i2 + i3;`
`inc(a[index]);`
`end;`
`for index := 0 to 7 do write(a[index]:5);`
`writeln;`
`end.`
	`printf("%5d", a[index]);`
	`printf("\n");`
	`return 0;`
	`}`

Ответ: 38 0 0 0 0 0 0 0.

Задача 10 (16 баллов). Постройте матрицу **D** после выполнения следующей программы и вычислите сумму элементов строго выше главной диагонали:

Pascal

```
const n=5;
var D: array[0..n-1,0..n-1] of integer;
var i, j, k, l: integer;
begin
k:=0; l:=0;
for i:=0 to n-1 do
for j:=0 to n-1 do
if ((i+j) mod 2 <> 0) then
begin k:=k-1; D[i,j]:=k; end
else begin l:=l+1; D[i,j]:=l; end;
for k:=0 to 1 do
for j:=0 to n-1 do
for i:=0 to n-1 do
D[i,j]:=min(D[i,j], D[i,k]+D[k,j]);
end.
```

C

```
#define MIN(X,Y) ((X) < (Y) ? (X) : (Y))
const int n=5;
int D[n][n];
int main() {
int i, j, k=0, l=0;
for (i=0; i<n; i++)
for (j=0; j<n; j++)
if ((i+j) % 2 != 0) D[i][j]=--k;
else D[i][j]=++l;
for (k=0; k<2; k++)
for (j=0; j<n; j++)
for (i=0; i<n; i++)
D[i][j]=MIN(D[i][j], D[i][k]+D[k][j]);
return 0;
}
```

Решение.

В конце программы матрица D будет иметь вид:

-4	-5	-9	-10	-10
-7	-8	-12	-13	-13
-13	-14	-26	-27	-27
-16	-17	-29	-30	-30
-18	-19	-31	-32	-32

Ответ: -156

Решения варианта 3

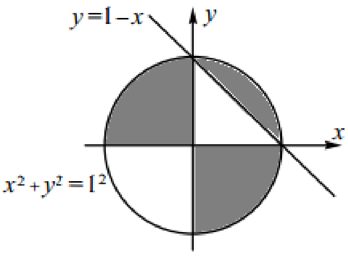
Задача 1 (8 баллов). Переведите шестнадцатеричное число A16 = 147E,59 в десятичную систему счисления. Ответ можно дать с точностью до 3-го знака после запятой.

Решение.

147E,59 = $1*16^3 + 4*16^2 + 7*16^1 + 14*16^0 + 5*16^{-1} + 9*16^{-2}$ = 4096 + 1024 + 112 + 14 + 0,3125 + 0,03515625 = 5246 + 0,34765625 = 5246,34765625.

Ответ: 5246,34765625.

Задача 2 (8 баллов). Запишите условие, которое является истинным, когда точка с координатами x, y попадает в заштрихованные участки плоскости, включая их границы.



Решение.

Используя нотацию, принятую в языке C, будем иметь

((x <= 0) && (y >= 0) && (x*x + y*y <= 1)) ||

((x >= 0) && (y <= 0) && (x*x + y*y <= 1)) ||

((x >= 0) && (y >= 0) && (y >= 1-x) && (x*x + y*y <= 1))

Задача 3 (8 баллов). Дано выражение, в котором используются поразрядные операции над 8-ми разрядными целыми числами без знака. В выражении используются круглые скобки и следующие знаки операций: поразрядное НЕ (~), поразрядное И (&), поразрядное ИЛИ (|), поразрядный сдвиг влево (<<), поразрядный сдвиг вправо (>>). Операции имеют следующие уровни приоритета: уровень 1 (~), уровень 2 (<< и >>), уровень 3 (&), уровень 4 (|). Вычислить значение следующего выражения: ~(b << 1 & b >> 1) & ((a | b) >> 1 | (a & b) << 1) для a = 195 и b = 60. Ответ дать в двоичной и десятичной формах.

Решение.

a = $c3_{16} = 11000011_2$

b = $3c_{16} = 00111100_2$

b << 1 = $78_{16} = 01111000_2$

b >> 1 = $1e_{16} = 00011110_2$

b << 1 & b >> 1 = $18_{16} = 00011000_2$

$\sim(b << 1 \,\&\, b >> 1) = e7_{16} = 11100111_2$

$a \mid b = ff_{16} = 11111111_2$

$(a \mid b) >> 1 = 7f_{16} = 01111111_2$

$a \,\&\, b = 00_{16} = 00000000_2$

$(a \,\&\, b) << 1 = 00_{16} = 00000000_2$

$(a \mid b) >> 1 \mid (a \,\&\, b) << 1 = 7f_{16} = 01111111_2$

$\sim(b << 1 \,\&\, b >> 1) \,\&\, ((a \mid b) >> 1 \mid (a \,\&\, b) << 1) = 67_{16} = 01100111_2 = 103_{10}$.

Ответ: $01100111_2 = 103_{10}$

Задача 4 (8 баллов). Упростить логическую функцию:

$A \wedge (A \rightarrow B) \wedge (A \leftrightarrow (C \wedge \neg B))$.

Ответ должен содержать не более трех логических операций.

Ответ: $A \wedge B \wedge \neg C$.

Задача 5 (8 баллов). Сколько существует положительных целых чисел, меньших 2003, которые a) делятся и на 3, и на 5, и на 7? b) делятся или на 3, или на 5, или на 7? c) не делятся ни на 3, ни на 5, ни на 7?

Решение.

Пусть универсум **U** будет множеством всех неотрицательных целых чисел, меньших 2003. Следовательно, |**U**| = 2003.

Имеется всего $\lfloor 2003/3 \rfloor = 667$ целых чисел, которые делятся на 3.

Имеется всего $\lfloor 2003/5 \rfloor = 400$ целых чисел, которые делятся на 5.

Имеется всего $\lfloor 2003/7 \rfloor = 286$ целых чисел, которые делятся на 7.

Имеется всего $\lfloor 2003/15 \rfloor = 133$ целых чисел, которые делятся на 3 и на 5.

Имеется всего $\lfloor 2003/35 \rfloor = 57$ целых чисел, которые делятся на 5 и на 7.

Имеется всего $\lfloor 2003/21 \rfloor = 95$ целых чисел, которые делятся на 3 и на 7.

Имеется всего $\lfloor 2003/105 \rfloor = 19$ целых чисел, которые делятся на 3 и на 5 и на 7.

Следовательно, количество чисел, которые делятся на3 или на 5 или на 7, равно 667 + 400 + 286 – 133 – 57 – 95 + 19 = 1087. Количество чисел, которые не делятся ни на одно из указанных целых чисел, равно 2003 – 1087 = 916.

Ответ: a) 33; b) 1087; c)916.

Задача 6 (8 баллов). Дана постфиксная (обратная польская) запись арифметического выражения:

a b d e f + – + * g h + i j + * *. Постройте бинарное дерево, задающее это выражение, покажите порядок обхода вершин дерева, позволяющий вычислить значение этого выражения, вычислите значение этого выражения для a=1, b=2, d=4, e=5, f=6, g=7, h=8, i=9, j=10.

Решение.

Линейная форма представления бинарного дерева выражения будет иметь вид: ((a*(b+(d-(e+f))))*((g+h)*(i+j)). Для наглядности дерево можно изобразить по правилу «корень вверху, листья внизу». Подставляя значения, получим ((1*(2+(4-(5+6))))*((7+8)*(9+10)) = -1425.

Ответ: -1425.

Задача 7 (12 баллов). Функция E определена рекурсивно для неотрицательных целых чисел n и k следующим образом: E(n, 0) = 1 для n >= 0; E(n, k) = (2*n-1-k)*E(n-1, k-1) + (k+1)*E(n-1, k) для 0 < k < n. Очевидно, что E(n, n) = 0 при n > 0; E(n, k) = 0 при k > n. Вычислить вручную E(6, 4).

Решение.

Производим вычисления по формуле и результаты заносим в таблицу размером 7x7. В итоге будет получен следующий треугольник:

n	k						
	0	1	2	3	**4**	5	6
0	1						
1	1	0					
2	1	2	0				
3	1	8	6	0			
4	1	22	58	24	0		
5	1	52	328	444	120	0	
6	1	114	1452	4400	**3708**	720	0

Ответ: E(6, 4) = 3708.

Задача 8 (12 баллов). Сколько различных решений имеет система логических уравнений

$\neg(x_1 \equiv x_2) \wedge \neg(x_1 \equiv x_3) \wedge (x_2 \equiv x_3) = 0$

$\neg(x_3 \equiv x_4) \wedge \neg(x_3 \equiv x_5) \wedge (x_4 \equiv x_5) = 0$

$\neg(x_5 \equiv x_6) \wedge \neg(x_5 \equiv x_7) \wedge (x_6 \equiv x_7) = 0$

$\neg(x_7 \equiv x_8) \wedge \neg(x_7 \equiv x_9) \wedge (x_8 \equiv x_9) = 0$

где $x_1, x_2, \ldots, x_9$ – логические переменные? В ответе не нужно перечислять все различные наборы значений переменных, при которых выполнены данные равенства. В качестве ответа нужно указать количество таких наборов.

Решение.

6) заметим два важных момента:

   в) все 4 уравнения – однотипные

   г) первое связано со вторым только через переменную $\mathbf{x_3}$, второе с третьим – только через $\mathbf{x_5}$, третье с четвертым – только через $\mathbf{x_7}$

7) разберем подробно одно первое уравнение; поскольку в нем используется операция И (конъюнкция) и правая часть равна нулю (ложное значение), имеет смысл проверить ситуации, когда первое уравнение истинно: это будет тогда, когда $\mathbf{x_2 \equiv x_3}$, а $\mathbf{x_1}$ не равно этому значению, то есть в двух случаях: $(\mathbf{x_1,x_2,x_3})=(1,0,0)$ и $(\mathbf{x_1,x_2,x_3})=(0,1,1)$

8) поскольку логическое уравнение с тремя переменными может иметь не более $8 = 2^3$ решений, вычитаем два решения из этого количества и находим, что первое уравнение имеет 8 – 2 = 6 решений, причем в трёх из них $\mathbf{x_3} = 0$, а в трёх других $\mathbf{x_3} = 1$.

9) подключаем второе уравнение: для каждого из трёх решений первого при $\mathbf{x_3} = 0$ получаем три решения второго, и для каждого из трёх решений первого при $\mathbf{x_3} = 1$ получаем ещё три решения второго, всего система из двух уравнений имеет 3*3 + 3*3 = 18 решений

10) далее продолжаем таблицу:

число уравнений	решений
1	$3_{(\text{при } \mathbf{x3}=0)} + 3_{(\text{при } \mathbf{x3}=1)} = 6$
2	$3*3 + 3*3 = 9_{(\text{при } \mathbf{x5}=0)} + 9_{(\text{при } \mathbf{x5}=1)} = 18$
3	$9*3 + 9*3 = 27_{(\text{при } \mathbf{x7}=0)} + 27_{(\text{при } \mathbf{x7}=1)} = 54$
4	27*3 + 27*3 = 81 + 81 = 162

Ответ: 162.

Задача 9 (12 баллов).

Pascal

```pascal
var a: array[0..7] of integer;
var j, i1, i2, i3, index: integer;
var s: array[0..39] of char;
begin
for j := 0 to 7 do a[j] := 0;
s := 'HHTTTHHTTTHTHHTHHTTHTTTHHHTHTTHTTHTTTHTH';
for j := 0 to 37 do begin
if ( s[j] = 'H' ) then i1 := 4 else i1 := 0;
if ( s[j+1] = 'H' ) then i2 := 2 else i2 := 0;
if ( s[j+2] = 'H' ) then i3 := 1 else i3 := 0;
index := i1 + i2 + i3;
inc(a[index]);
end;
for index := 0 to 7 do write(a[index]:5);
writeln;
end.
```

C

```c
int a[8] = { 0 };
int main(void)
{
int j, index;
char s[] =  "
HHTTTHHTTTHTHHTHHTTHTTTHHHTHTTHTTHTTTHTH
";
for (j = 0; j < 38; ++j) {
index = ( s[j] == 'H' ? 4 : 0 )
+ ( s[j+1] == 'H' ? 2 : 0 )
+ ( s[j+2] == 'H' ? 1 : 0 );
a[index]++;
}
for (unsigned index = 0; index < 8; ++index)
printf("%5d", a[index]);
printf("\n");
return 0;
}
```

Ответ: 4 7 6 4 7 4 5 1.

Задача 10 (16 баллов). Постройте матрицу **D** после выполнения следующей программы и вычислите сумму элементов строго выше побочной диагонали:

Pascal

```pascal
const n=5;
var D: array[0..n-1,0..n-1] of integer;
var i, j, k, l: integer;
begin
k:=0; l:=0;
for i:=0 to n-1 do
for j:=0 to n-1 do
if ((i+j) mod 2 <> 0) then
begin k:=k-1; D[i,j]:=k; end
else begin l:=l+1; D[i,j]:=l; end;
for k:=0 to 1 do
for j:=0 to n-1 do
for i:=0 to n-1 do
D[i,j]:=min(D[i,j], D[i,k]+D[k,j]);
end.
```

C

```c
#define MIN(X,Y) ((X) < (Y) ? (X) : (Y))
const int n=5;
int D[n][n];
int main() {
int i, j, k=0, l=0;
for (i=0; i<n; i++)
for (j=0; j<n; j++)
if ((i+j) % 2 != 0) D[i][j]=--k;
else D[i][j]=++l;
for (k=0; k<2; k++)
for (j=0; j<n; j++)
for (i=0; i<n; i++)
D[i][j]=MIN(D[i][j], D[i][k]+D[k][j]);
return 0;
}
```

Решение.

В конце программы матрица D будет иметь вид:

-4	-5	-9	-10	-10
-7	-8	-12	-13	-13
-13	-14	-26	-27	-27
-16	-17	-29	-30	-30
-18	-19	-31	-32	-32

Ответ: -98

Решение варианта 4

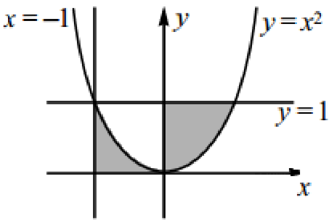
Задача 1 (8 баллов). Переведите шестнадцатеричное число A_{16} = 13CE,D2 в десятичную систему счисления. Ответ можно дать с точностью до 3-го знака после запятой.

Решение.

13CE,D2 = $1*16^3 + 3*16^2 + 12*16^1 + 14*16^0 + 13*16^{-1} + 2*16^{-2}$ = 4096 + 768 + 192 + 14 + 0,8125 + 0,0078125 = 5070 + 0,8203125 = 5070,8203125.

Ответ: 5070,8203125.

Задача 2 (8 баллов). Запишите одно единственное условие, которое является истинным, когда точка с координатами x, y попадает в заштрихованные участки плоскости, включая их границы.



Решение.

Используя нотацию, принятую в языке C, будем иметь

((x <= 0 && x >= -1) && (y >= 0 && y <= 1) && (y <= x*x)) ||

((x >= 0) && (y >= 0 && y <= 1) && (y >= x*x))

Задача 3 (8 баллов). Дано выражение, в котором используются поразрядные операции над 8-ми разрядными целыми числами без знака. В выражении используются круглые скобки и следующие знаки операций: поразрядное НЕ (~), поразрядное И (&), поразрядное ИЛИ (|), поразрядный сдвиг влево (<<), поразрядный сдвиг вправо (>>). Операции имеют следующие уровни приоритета: уровень 1 (~), уровень 2 (<< и >>), уровень 3 (&), уровень 4 (|). Вычислить значение следующего выражения: (b << 2 | b >> 2) | ~((a & b) >> 2 | (a | b) << 2) для a = 60 и b = 195. Ответ дать в двоичной и десятичной формах.

Решение.

13) a = $3c_{16}$ = 00111100_2

14) b = $c3_{16}$ = 11000011_2

15) b << 2 = c_{16} = 00001100_2

16) b >> 2 = 30_{16} = 00110000_2

17) b << 2 | b >> 2) = $3c_{16}$ = 00111100_2

18) $a \& b = 0_{16} = 00000000_2$

19) $(a \& b) >> 2 = 0_{16} = 00000000_2$

20) $a | b = ff_{16} = 11111111_2$

21) $(a | b) << 2 = fc_{16} = 11111100_2$

22) $(a \& b) >> 2 | (a | b) << 2) = fc_{16} = 11111100_2$

23) $\sim((a \& b) >> 2 | (a | b) << 2) = 3_{16} = 00000011_2$

24) $(b << 2 | b >> 2) | \sim((a \& b) >> 2 | (a | b) << 2) = 3f_{16} = 00111111_2 = 63_{10}$.

Ответ: $00111111_2 = 63_{10}$

Задача 4 (8 баллов). Упростить логическую функцию:

$(A \to (B \vee C)) \leftrightarrow ((A \to B) \vee \neg(A \to C))$. Ответ должен содержать не более двух логических операций.

Ответ: $\neg A \vee B$.

Задача 5 (8 баллов). Сколько существует положительных целых чисел, меньших 2003, которые a) делятся и на 4, и на 5, и на 6? b) делятся или на 4, или на 5, или на 6? c) не делятся ни на 4, ни на 5, ни на 6?

Решение.

Пусть универсум **U** будет множеством всех неотрицательных целых чисел, меньших 2003. Следовательно, |**U**| = 2003.

Имеется всего $\lfloor 2003/4 \rfloor = 500$ целых чисел, которые делятся на 4.

Имеется всего $\lfloor 2003/5 \rfloor = 400$ целых чисел, которые делятся на 5.

Имеется всего $\lfloor 2003/6 \rfloor = 333$ целых чисел, которые делятся на 6.

Имеется всего $\lfloor 2003/20 \rfloor = 100$ целых чисел, которые делятся на 4 и на 5.

Имеется всего $\lfloor 2003/30 \rfloor = 66$ целых чисел, которые делятся на 5 и на 6.

Имеется всего $\lfloor 2003/12 \rfloor = 166$ целых чисел, которые делятся на 4 и на 6.

Имеется всего $\lfloor 2003/60 \rfloor = 33$ целых числа, которые делятся на 4 и на 5 и на 6.

Следовательно, количество чисел, которые делятся на 4 или на 5 или на 6, равно 500 + 400 + 333 – 100 – 66 – 166 + 33 = 934. Количество чисел, которые не делятся ни на одно из указанных целых чисел, равно 2003 – 934 = 1069.

Ответ: a) 33; b) 934; c) 1069.

Задача 6 (8 баллов). Дана префиксная запись арифметического выражения: + a * x + b * x + c * x + d * x + e x. Постройте бинарное дерево, задающее это выражение, покажите порядок обхода вершин дерева, позволяющий вычислить значение этого выражения, вычислите значение этого выражения для x=3, a=5, b=4, c=3, d=2, e=1.

Решение.

Линейная форма представления бинарного дерева выражения будет иметь вид ((((((((((e+x)*x)+d)*x)+c)*x)+b)*x)+a). Для наглядности дерево можно изобразить по правилу «корень вверху, листья внизу». Подставляя значения, получим ((((((((((1+3)*3)+2)*3)+3)*3)+4)*3)+5) = 422.

Ответ: 422.

Задача 7 (12 баллов). Функция E определена рекурсивно для неотрицательных целых чисел n и k следующим образом: E(n, 0) = 1 для n >= 0; E(n, k) = (n-k)*E(n-1, k-1) + (k+1)*E(n-1, k) для 0 < k < n. Очевидно, что E(n, n) = 0 при n > 0; E(n, n-1) = 1 при n > 0; E(n, k) = 0 при k > n. Вычислить вручную E(6, 4).

Решение.

Производим вычисления по формуле и результаты заносим в таблицу размером 7x7. В итоге будет получен следующий треугольник чисел:

n	k						
	0	1	2	3	**4**	5	6
0	1						
1	1	0					
2	1	1	0				
3	1	4	1	0			
4	1	11	11	1	0		
5	1	26	66	26	1	0	
6	1	57	302	302	**57**	1	0

Ответ: E(6, 4) = 57.

Задача 8 (12 баллов). Сколько различных решений имеет система логических уравнений

$$((\neg x_1 \to y_1) \wedge z_1) = ((\neg x_2 \vee y_2) \to z_2)$$

$$((\neg x_2 \to y_2) \wedge z_2) = ((\neg x_3 \vee y_3) \to z_3)$$

где $x_1, \ldots, x_3, y_1, \ldots, y_3$ – логические переменные? В ответе не нужно перечислять все различные наборы значений переменных, при которых выполнены данные равенства. В качестве ответа нужно указать количество таких наборов.

Решение.

1) перепишем систему уравнений в более понятном виде:

$$(\bar{x}_1 \to y_1)\cdot z_1 = (\bar{x}_2 + y_2) \to z_2$$
$$(\bar{x}_2 \to y_2)\cdot z_2 = (\bar{x}_3 + y_3) \to z_3$$

2) рассмотрим первое уравнение

$$(\bar{x}_1 \to y_1)\cdot z_1 = (\bar{x}_2 + y_2) \to z_2$$

его левая часть равна 1, если $(x_1, y_1) = (0,1), (1,0), (1,1)$ при $z_1 = 1$; таким образом, есть всего 3 различных варианта, дающих 1 в левой части:

$$(x_1, y_1, z_1) = (011), (101), (111)$$

3) в левой части первого уравнения 3 переменных, поэтому всего есть $2^3 = 8$ комбинаций этих данных; в оставшихся 5 комбинациях левая часть первого уравнения равна 0

	1-е уравнение	
обе части равны…	$x_1y_1z_1$	$x_2y_2z_2$
1	011 101 111	
0	000 001 010 100 110	

4) аналогично находим, что правая часть первого уравнения равна 0 при 3-х комбинациях переменных $(x_2, y_2, z_2) = (000), (010), (110)$, причём каждой из них соответствует 5 троек (x_1, y_1, z_1); эта же правая часть равна 1 для пяти остальных комбинаций (x_2, y_2, z_2), причём каждой из них соответствует 3 комбинации (x_1, y_1, z_1):

	1-е уравнение	
обе части равны…	$x_1y_1z_1$	$x_2y_2z_2$
1	011 101 111	001 (3) 011 (3) 100 (3) 101 (3) 111 (3)
0	000 001 010 100 110	000 (5) 010 (5) 110 (5)

5) поэтому первое уравнение имеет 5·3 + 3·5 = 30 решений: 15 решений, при которых обе части равны 0, и 15 решений, при которых обе части равны 1

6) теперь подключаем второе уравнение: выпишем в следующий столбец все комбинации (x_2, y_2, z_2), при которых его левая часть равна 0, и в следующую строку – все

комбинации (x_2, y_2, z_2), при которых его левая часть равна 1, указав соответствующее число решений первого уравнения:

	1-е уравнение		2-е уравнение	
обе части равны…	$x_1y_1z_1$	$x_2y_2z_2$	$x_2y_2z_2$	$x_3y_3z_3$
1	011 101 111	001 (3) 011 (3) 100 (3) 101 (3) 111 (3)	011 (3) 101 (3) 111 (3)	001 (9) 011 (9) 100 (9) 101 (9) 111 (9)
0	000 001 010 100 110	000 (5) 010 (5) 110 (5)	000 (5) 001 (3) 010 (5) 100 (3) 110 (5)	000 (21) 010 (21) 110 (21)

таким образом, на каждую комбинацию (x_3, y_3, z_3), при которых правая часть второго уравнения равна 1, приходится 3 + 3 + 3 = 9 допустимых троек (x_2, y_2, z_2), а на каждую комбинацию (x_3, y_3, z_3), при которых правая часть второго уравнения равна 0, приходится 5 + 3 + 5 + 3 + 5 = 21 допустимая тройка (x_2, y_2, z_2).

	1-е уравнение		2-е уравнение	
обе части равны…	$x_1y_1z_1$	$x_2y_2z_2$	$x_2y_2z_2$	$x_3y_3z_3$
1	011 101 111	001 (3) 011 (3) 100 (3) 101 (3) 111 (3)	011 (3) 101 (3) 111 (3)	
0	000 001 010 100 110	000 (5) 010 (5) 110 (5)	000 (5) 001 (3) 010 (5) 100 (3) 110 (5)	

несложно проверить, что 5 троек (x_3, y_3, z_3) дают 1 в правой части второго уравнения, а оставшиеся 3 тройки – 0:

	1-е уравнение		2-е уравнение	
обе части равны…	$x_1y_1z_1$	$x_2y_2z_2$	$x_2y_2z_2$	$x_3y_3z_3$
1	011 101 111	001 (3) 011 (3) 100 (3) 101 (3) 111 (3)	011 (3) 101 (3) 111 (3)	001 (9) 011 (9) 100 (9) 101 (9) 111 (9)
0	000 001 010	000 (5) 010 (5) 110 (5)	000 (5) 001 (3) 010 (5)	000 (21) 010 (21) 110 (21)

	100 110		100 (3) 110 (5)	

7) для получения ответа нужно сложить числа в скобках в последнем столбце таблицы:

8) 9 + 9 + 9 + 9 + 9 + 21 + 21 + 21 = 108

Ответ: 108.

Задача 9 (12 баллов). Определите, что будет напечатано в результате выполнения следующей программы:

Pascal	C

var a: array[0..7] of integer;
var j, i1, i2, i3, index: integer;
var s: array[0..39] of char
begin
for j := 0 to 7 do a[j] := 0;
s := 'HTHTHHHTHHHTHTHHHHHTTTHTTTTTHHTTTTHTHHHHT';
for j := 0 to 37 do begin
if (s[j] = 'H') then i1 := 4 else i1 := 0;
if (s[j+1] = 'H') then i2 := 2 else i2 := 0;
if (s[j+2] = 'H') then i3 := 1 else i3 := 0;
index := i1 + i2 + i3;
inc(a[index]);
end;
for index := 0 to 7 do write(a[index]:5);
writeln;
end.
	int a[8] = { 0 };
	int main(void)
	{
	int j, index;
	char s[] = "
	HTHTHHHTHHHTHTHHHHHTTTHTTTTTHHTTTTHTHHHHT";
	for (j = 0; j < 38; ++j) {
	index = (s[j] == 'H' ? 4 : 0)
	+ (s[j+1] == 'H' ? 2 : 0)
	+ (s[j+2] == 'H' ? 1 : 0);
	a[index]++;
	}
	for (unsigned index = 0; index < 8; ++index)
	printf("%5d", a[index]);
	printf("\n");
	return 0;
	}

Ответ: 6 3 4 5 3 6 5 6.

Задача 10 (16 баллов). Постройте матрицу **D** после выполнения следующей программы и вычислите сумму элементов строго ниже побочной диагонали:

Pascal	C

const n=5;
var D: array[0..n-1,0..n-1] of integer;
var i, j, k, l: integer;
begin
k:=0; l:=0;
for i:=0 to n-1 do
for j:=0 to n-1 do
if ((i+j) mod 2 <> 0) then
begin k:=k-1; D[i,j]:=k; end
else begin l:=l+1; D[i,j]:=l; end;
for k:=0 to 1 do
for j:=0 to n-1 do
for i:=0 to n-1 do
D[i,j]:=min(D[i,j], D[i,k]+D[k,j]);
end.
	#define MIN(X,Y) ((X) < (Y) ? (X) : (Y))
	const int n=5;
	int D[n][n];
	int main() {
	int i, j, k=0, l=0;
	for (i=0; i<n; i++)
	for (j=0; j<n; j++)
	if ((i+j) % 2 != 0) D[i][j]=--k;
	else D[i][j]=++l;
	for (k=0; k<2; k++)
	for (j=0; j<n; j++)
	for (i=0; i<n; i++)
	D[i][j]=MIN(D[i][j], D[i][k]+D[k][j]);
	return 0;
	}

Решение.

Исходная матрица будет иметь вид:

1 -1 2 -2 3

-3 4 -4 5 -5

6	-6	7	-7	8
-8	9	-9	10	-10
11	-11	12	-12	13

Для k = 0 матрица D будет иметь вид:

1	-1	2	-2	3
-3	4	-4	5	-5
6	-6	7	-7	8
-8	9	-9	10	-10
11	-11	12	-12	13

Для k = 1 матрица D будет иметь вид:

-4	-5	-9	-10	-10
-7	-8	-12	-13	-13
-13	-14	-26	-27	-27
-16	-17	-29	-30	-30
-18	-19	-31	-32	-32

Итоговая матрица D будет иметь вид:

-4	-5	-9	-10	-10
-7	-8	-12	-13	-13
-13	-14	-26	-27	-27
-16	-17	-29	-30	-30
-18	-19	-31	-32	-32

Ответ: Сумма элементов итоговой матрицы D строго ниже побочной диагонали равна: -270