Второй (заключительный) этап академического соревнования

Олимпиады школьников «Шаг в будущее» по общеобразовательному предмету «Информатика»

Вариант 5 (условия и ответы)

Задача 1 (8 баллов). Переведите десятичное число A_{10} = 1876,54625 в шестнадцатеричную систему счисления. Ответ дать с точностью до 4-го знака после запятой.

Ответ: 754,8BD7.

Задача 2 (8 баллов). Сколько существует шестизначных чисел, если первая цифра разряда может быть нулем, цифры не должны повторяться для трех случаев: a) последние две цифры должны быть 7 и 8 в любом порядке? b) первая цифра должна быть 1, а цифры 7 и 8 должны стоять рядом в указанном порядке? c) цифры 7 и 8 должны стоять рядом в любом порядке?

Ответ: a) 8!/4!*2! = 8*7*6*5*2 = 3360; b) 8!/4! = 8*7*6*5 = 1680; c) 9!/4!*2! = 9*8*7*6*5*2= 30240.

Задача 3 (8 баллов). На книжной полке расположены книги по математике, физике, информатике и химии. Какая книга будет выбрана при одновременном выполнении следующих условий: a) если не выбирается информатика, то не выбирается физика; b) не верно, что если выбирается химия, то выбирается информатика; c) если выбирается математика, то выбирается физика.

Ответ: Химия.

Задача 4 (8 баллов). Предположим, что команды A и B играют между собой в турнире по бейсболу. Для победы в турнире команде необходимо выиграть три игры из пяти. Предположим, известно, что команда B выиграла первую игру. Сколько вариантов победы осталось у команды A и сколько у команды B?

Ответ: 4 и **6.**

Задача 5 (12 баллов). Функция S определена рекурсивно для неотрицательных целых чисел n и k следующим образом: S(0, 0) = 1; S(n, 0) = 0 для n > 0; S(n, k) = S(n-1, k-1) + (n-1)*S(n-1, k) для 0 < k < n. Очевидно, что S(n, n) = 1; S(n, k) = 0 при k > n. Вычислить вручную S(6, 3).

Ответ: 225.

Задача 6 (12 баллов). Дана префиксная запись арифметического выражения: + * + * + * + * + x a x b x c x d x e. Вычислить вручную значение этого выражения для x=3, a=5, b=4, c=3, d=2, e=1.

Ответ: 790.

Задача 7 (8 баллов). Определите, что будет напечатано в результате выполнения следующей программы:

Pascal
```
var a: byte=110; b: byte=11;
begin
  writeln(
  byte(not(byte(a shr 2) or byte(b shl 2))) and
  ((a and byte(not b)) or (byte(not a) and b)) );
end.
```

C
```
typedef unsigned char byte;
int main() {
  byte a=110, b=11;
  printf( "%d\n",
  (byte)(~((byte)(a >> 2) | (byte)(b << 2))) &
  ((a & (byte)(~b)) | ((byte)(~a) & b)) );
  return 0;
}
```

Ответ: 64.

Задача 8 (8 баллов). Определите, какое число будет напечатано в результате выполнения следующей программы:

Pascal
```
function f(x: integer): integer;
begin f:= 16*(9-x)*(9-x)+127; end;
var a, b, p, n, t: integer;
begin
  a:=-10; b:=10; p:=130; n:=0;
  for t:=a to b do if (f(t) > p) then n:=n+1;
  writeln(n);
end.
```

C
```
int f(int x) { return 16*(9-x)*(9-x)+127; }
int main() {
  int a=-10, b=10, p=130, n=0, t;
  for (t=a; t<=b; t++) if (f(t) > p) n++;
  printf("%d\n", n);
  return 0;
}
```

Ответ: 20.

Задача 9 (12 баллов). Чему будет равна сумма элементов матрицы **A** после выполнения следующей программы:

Pascal

```
const n=9;
var A: array[0..n-1,0..n-1] of integer;
    i, k: integer;
begin
  for i:=0 to n-1 do
    for k:=0 to n-1 do A[i,k]:=0;
  for i:=0 to n-1 do
    if (i <= n div 2)
    then for k:=i to n-i-1 do A[i,k]:=1
    else for k:=n-i-1 to i do A[i,k]:=1;
end.
```

C

```
const int n=9;
int main() {
  int A[n][n]={0};
  for (int i=0; i<n; i++)
    if (i <= n/2)
      for (int k=i; k<n-i; k++) A[i][k]=1;
    else
      for (int k=n-i-1; k<=i; k++) A[i][k]=1;
  return 0;
}
```

Ответ: 49.

Задача 10 (16 баллов). Выпишите элементы главной диагонали матрицы **D** в конце выполнения следующей программы:

Pascal

```
const n=5;
var D: array[0..n-1,0..n-1] of integer;
var i, j, k, l: integer;
begin
  k:=0; l:=0;
  for i:=0 to n-1 do
    for j:=0 to n-1 do
      if ((i+j) mod 2 = 0)
      then begin k:=k+1; D[i,j]:=k; end
      else begin l:=l-1; D[i,j]:=l; end;
  for k:=0 to 1 do
    for i:=0 to n-1 do
      for j:=0 to n-1 do
        D[i,j]:=min(D[i,j], D[i,k]+D[k,j]);
end.
```

C

```
#define MIN(X,Y) ((X) < (Y) ? (X) : (Y))
const int n=5;
int D[n][n];
int main() {
  int i, j, k=0, l=0;
  for (i=0; i<n; i++)
    for (j=0; j<n; j++)
      if ((i+j) % 2 == 0) D[i][j]=++k;
      else D[i][j]=--l;
  for (k=0; k<2; k++)
    for (i=0; i<n; i++)
      for (j=0; j<n; j++)
        D[i][j]=MIN(D[i][j], D[i][k]+D[k][j]);
  return 0;
}
```

Ответ: -4 -8 -26 -30 -32.

Вариант 6 (условия и ответы)

Задача 1 (8 баллов). Переведите десятичное число A_{10} = 592,15625 в шестнадцатеричную систему счисления.

Ответ: 250,28.

Задача 2 (8 баллов). Сколько существует перестановок букв *a, c, f, m, p, r, t, x*, если a) не существует никаких ограничений? b) первые четыре буквы должны быть выбраны из *a, c, f, m* в любом порядке? c) буквы *a, c, f, m* должны стоять рядом в любом порядке?

Ответ: a) 8! = 40320; b) 4!*4! = 24*24 = 576; c) 4!*5! = 24*120 = 2880.

Задача 3 (8 баллов). В понедельник в одном из классов должно быть проведено 4 урока – по математике, физике, информатике и биологии. Учителя школы высказали свои пожелания для составления расписания. Учитель математики хочет иметь первый или второй урок, учитель физики – второй или третий урок, учитель информатики – первый или четвертый, учитель биологии – третий или четвертый. Какие варианты расписания устроят всех учителей школы?

Ответ: МФБИ и **ИМФБ.**

Задача 4 (8 баллов). Пять команд: A, B, C, D и E, соревнуются между собой по волейболу. Один человек предсказал такой результат соревнований (начиная с первого места): ABCDE, другой: BDEAC. Первый человек угадал правильные места только для трех команд, а второй – только для двух. Найдите для каждой команды ее истинное место. В ответе перечислите подряд без пробелов буквы, соответствующие местам команд.

Ответ: ABEDC.

Задача 5 (12 баллов). Функция S определена рекурсивно для неотрицательных целых чисел n и k следующим образом: S(0, 0) = 1; S(n, 0) = 0 для n > 0; S(n, k) = S(n-1, k-1) + k*S(n-1, k) для 0 < k < n. Очевидно, что S(n, 1) = 1 при n > 0; S(n, n) = 1; S(n, k) = 0 при k > n. Вычислить вручную S(6, 3).

Ответ: 90.

Задача 6 (12 баллов). Дана префиксная запись арифметического выражения: + a * x + b * x + c * x + d * x + ex. Вычислить вручную значение этого выражения для x=3, a=5, b=4, c=3, d=2, e=1.

Ответ: 422.

Задача 7 (8 баллов). Определите, что будет напечатано в результате выполнения следующей программы:

Pascal

```
var a: byte=220; b: byte=22;
begin
  writeln(
  byte(not(byte(a shr 2) or byte(b shl 2))) and
  ((a and byte(not b)) or (byte(not a) and b)) );
end.
```

C

```
typedef unsigned char byte;
int main() {
  byte a=220, b=22;
  printf( "%d\n",
  (byte)(~((byte)(a >> 2) | (byte)(b << 2))) &
  ((a & (byte)(~b)) | ((byte)(~a) & b)) );
  return 0;
}
```

Ответ: 128.

Задача 8 (8 баллов). Определите, какое число будет напечатано в результате выполнения следующей программы:

Pascal

```
function f(x: integer): integer;
begin
  f:= (x*x-4)*(x*x-4)+6;
end;
var a, b, m, r, t: integer;
begin
  a:=-10; b:=10; m:=a; r:=f(a);
  for t:=a to b do
    if (f(t) < r) then begin m:=t; r:=f(t); end;
  writeln(m);
end.
```

C

```
int f(int x) { return (x*x-4)*(x*x-4)+6; }
int main() {
  int t, a=-10, b=10, m=a, r=f(a);
  for (t=a; t<=b; t++)
    if (f(t) < r) { m=t; r=f(t); }
  printf("%d\n", m);
  return 0;
}
```

Ответ: -2.

Задача 9 (12 баллов). Чему будет равна сумма элементов матрицы **A** после выполнения следующей программы:

Pascal	C

`const n=9;`
`var A: array[0..n-1,0..n-1] of integer;`
`    i, k: integer;`
`begin`
`  for i:=0 to n-1 do`
`    for k:=0 to n-1 do A[i,k]:=0;`
`  for i:=0 to n-1 do`
`    if (i < n div 2) then`
`      for k:=i+1 to n-i-2 do A[i,k]:=1`
`    else if (i > n div 2) then`
`      for k:=n-i to i-1 do A[i,k]:=1`
`    else ;`
`end.`
	`const int n=9;`
	`int main() {`
	`  int A[n][n]={0};`
	`  for (int i=0; i<n; i++)`
	`    if (i < n/2)`
	`      for (int k=i+1; k<n-i-1; k++) A[i][k]=1;`
	`    else if (i > n/2)`
	`      for (int k=n-i; k<i; k++) A[i][k]=1;`
	`    else ;`
	`  return 0;`
	`}`

Решение.

Преобразованная матрица:

```
0   1   1   1   1   1   1   1   0
0   0   1   1   1   1   1   0   0
0   0   0   1   1   1   0   0   0
0   0   0   0   1   0   0   0   0
0   0   0   0   0   0   0   0   0
0   0   0   0   1   0   0   0   0
0   0   0   1   1   1   0   0   0
0   0   1   1   1   1   1   0   0
0   1   1   1   1   1   1   1   0
```

Ответ: 32.

Задача 10 (16 баллов). Выпишите элементы главной диагонали матрицы **D** в конце выполнения следующей программы:

Pascal	C

`const n=5;`
`var D: array[0..n-1,0..n-1] of integer;`
`var i, j, k, l: integer;`
`begin`
`  k:=0; l:=0;`
`  for i:=0 to n-1 do`
`    for j:=0 to n-1 do`
`      if ((i+j) mod 2 = 0)`
`      then begin k:=k+1; D[i,j]:=k; end`
`      else begin l:=l-1; D[i,j]:=l; end;`
`  for k:=0 to 1 do`
`    for i:=0 to n-1 do`
`      for j:=0 to n-1 do`
`        D[i,j]:=max(D[i,j], D[i,k]+D[k,j]);`
`end.`
	`#define MAX(X,Y) ((X) > (Y) ? (X) : (Y))`
	`const int n=5;`
	`int D[n][n];`
	`int main() {`
	`  int i, j, k=0, l=0;`
	`  for (i=0; i<n; i++)`
	`    for (j=0; j<n; j++)`
	`      if ((i+j) % 2 == 0) D[i][j]=++k;`
	`      else D[i][j]=--l;`
	`  for (k=0; k<2; k++)`
	`    for (i=0; i<n; i++)`
	`      for (j=0; j<n; j++)`
	`        D[i][j]= MAX(D[i][j], D[i][k]+D[k][j]);`
	`  return 0;`
	`}`

Решение.

Исходная матрица:

```
  1  -1   2  -2   3
 -3   4  -4   5  -5
  6  -6   7  -7   8
 -8   9  -9  10 -10
 11 -11  12 -12  13
```

Матрица для k=0:

```
  2   1   4   0   5
 -1   4   3   5   4
  8   9  12   8  13
 -6   9  -2  10  -1
 13  14  17  13  18
```

Матрица для k=1:

```
  2   5   8  10   9
```

```
  3   8  11  13  12
 12  17  28  30  29
 12  17  28  30  29
 17  22  33  35  34
```

Ответ: 2 8 28 30 34.

Вариант 7 (условия и ответы)

Задача 1 (8 баллов). Переведите шестнадцатеричное число A_{16} = 13CE,D2 в десятичную систему счисления.

Ответ: 5070,8203125.

Задача 2 (8 баллов). Сколькими способами можно расположить для фотографирования пять мальчиков и пять девочек, если a) не существует никаких ограничений? b) ни две девочки, ни два мальчика не должны стоять рядом? c) все девочки должны стоять рядом?

Ответ: a) 10! = 3628800; b) 2*5!*5! = 28800; c) 6!*5! = 86400.

Задача 3 (8 баллов). Укажите наибольшее целое число X, при котором логическое выражение (50 < X*X) -> (50 > (X+1)*(X+1)) истинно.

Решение.

1) это операция импликации между двумя отношениями A = (50 < X^2) и B = (50 > $(X+1)^2$));
2) пусть A = (50 < X^2) – истинно, тогда, с учетом того, что $X^2 > 0$, находим, что B = (50 > $(X+1)^2$)) – ложно, таким образом, импликация A → B ложна;
3) следовательно, импликация может быть истинной только при X^2 <= 50; поскольку в этом случае высказывание A ложно, то A → B = 0 → B = 1при любом B;
4) максимальное целое значение X, при котором X^2 <= 50, равно 7.

Ответ: 7.

Задача 4 (8 баллов). На соревнованиях по гимнастике в четверку лучших вошли команды: A, B, C и D. Три спортивных эксперта высказали свои предположения о распределении мест на соревнованиях: 1) Первой будет команда A, а второй - B. 2) Второе место займет команда C, а команда D – четвертое место. 3) Команда D займет третье место, а команда A будет второй. Когда соревнования закончились, оказалось, что каждый из экспертов был прав только в одном из своих прогнозов. Какое место на соревнованиях заняли команды A, B, C и D? В ответе перечислите подряд без пробелов числа, соответствующие местам команд в указанном порядке имен.

Ответ: 1423.

Задача 5 (12 баллов). Функция E определена рекурсивно для неотрицательных целых чисел n и k следующим образом: E(n, 0) = 1 для n >= 0; E(n, k) = (n-k)*E(n-1, k-1) + (k+1)*E(n-1, k) для 0 < k < n. Очевидно, что E(n, n) = 0 при n > 0; E(n, n-1) = 1 при n > 0; E(n, k) = 0 при k > n. Вычислить вручную E(6, 3).

Решение.

Производим вычисления по формуле и результаты заносим в таблицу размером 7x7. В итоге будет получен следующий треугольник:

n	k						
	0	1	2	3	4	5	6
0	1						
1	1	0					
2	1	1	0				
3	1	4	1	0			
4	1	11	11	1	0		
5	1	26	66	26	1	0	
6	1	57	302	302	57	1	0

Ответ: 302.

Задача 6 (12 баллов). Дана префиксная запись арифметического выражения: * * – + a b c d – e * f + g h. Вычислить вручную значение этого выражения для a=8, b=7, c=6, d=5, e=4, f=3, g=2, h=1.

Решение.

Линейная форма представления бинарного дерева выражения будет иметь вид ((((a+b)-c)*d)*(e-(f*(g+h)))). Подставляя значения, получим ((((8+7)-6)*5)*(4-(3*(2+1)))) = -225.

Ответ: -225.

Задача 7 (8 баллов). Определите, что будет напечатано в результате выполнения следующей программы:

Pascal	C

`var a: byte=240; b: byte=63;`
`begin`
`  writeln(`
`  byte((a and byte(not(byte(b shl 1)))) shr 2) or`
`  byte(not(byte(a shl 1))) and byte(b shr 2) );`
`end.`
	`typedef unsigned char byte;`
	`int main() {`
	`  byte a=240, b=63;`
	`  printf( "%d\n",`
	`  (byte)((a & (byte)(~(byte)(b << 1))) >> 2) |`
	`  (byte)(~(byte)(a << 1)) & (byte)(b >> 2) );`
	`return 0;`
	`}`

Ответ: 47.

Задача 8 (8 баллов). Определите, какое число будет напечатано в результате выполнения следующей программы:

Pascal	C

`function f(x: integer): integer;`
`begin`
`  f:=(x*x-4)*(x*x-4)+6;`
`end;`
`var a, b, m, t: integer;`
`begin`
`  a:=-10; b:=10; m:=0;`
`  for t:=a to b do`
`    if (f(t) > f(t-1)) and (f(t) > f(t+1))`
`    then m:=m+1;`
`  writeln(m);`
`end.`
	`int f(int x) { return (x*x-4)*(x*x-4)+6; }`
	`int main() {`
	`  int t, a=-10, b=10, m=0;`
	`  for (t=a; t<=b; t++)`
	`    if (f(t) > f(t-1) && f(t) > f(t+1)) m++;`
	`  printf("%d\n", m);`
	`  return 0;`
	`}`

Ответ: 1.

Задача 9 (12 баллов). Чему будет равна сумма элементов матрицы **A** после выполнения следующей программы:

Pascal	C

`const n=9;`
`var A: array[0..n-1,0..n-1] of integer;`
`    i, k: integer;`
`begin`
`  for i:=0 to n-1 do`
`    for k:=0 to n-1 do A[i,k]:=0;`
`  for k:=0 to n-1 do`
`    if (k < n div 2) then`
`      for i:=k+1 to n-k-2 do A[i,k]:=1`
`    else if (k > n div 2) then`
`      for i:=n-k to k-1 do A[i,k]:=1`
`    else ;`
`end.`
	`const int n=9;`
	`int main() {`
	`  int A[n][n]={0};`
	`  for (int k=0; k<n; k++)`
	`    if (k < n/2)`
	`      for (int i=k+1; i<n-k-1; i++) A[i][k]=1;`
	`    else if (k > n/2)`
	`      for (int i=n-k; i<k; i++) A[i][k]=1;`
	`    else ;`
	`  return 0;`
	`}`

Решение.

Преобразованная матрица:

```
0  0  0  0  0  0  0  0  0
1  0  0  0  0  0  0  0  1
1  1  0  0  0  0  0  1  1
1  1  1  0  0  0  1  1  1
1  1  1  1  0  1  1  1  1
1  1  1  0  0  0  1  1  1
1  1  0  0  0  0  0  1  1
1  0  0  0  0  0  0  0  1
0  0  0  0  0  0  0  0  0
```

Ответ: 32.

Задача 10 (16 баллов). Выпишите элементы побочной диагонали матрицы **D** в конце выполнения следующей программы:

Pascal	C

`const n=5;`
`var D: array[0..n-1,0..n-1] of integer;`
`var i, j, k, l: integer;`
	`#define MIN(X,Y) ((X) < (Y) ? (X) : (Y))`
	`const int n=5;`
	`int D[n][n];`

<pre>begin
  k:=0; l:=0;
  for i:=0 to n-1 do
    for j:=0 to n-1 do
      if ((i+j) mod 2 = 0)
      then begin k:=k-1; D[i,j]:=k; end
      else begin l:=l+1; D[i,j]:=l; end;
  for k:=0 to 1 do
    for i:=0 to n-1 do
      for j:=0 to n-1 do
        D[i,j]:=min(D[i,j], D[i,k]+D[k,j]);
end.</pre>
	<pre>int main() {
	  int i, j, k=0, l=0;
	  for (i=0; i<n; i++)
	    for (j=0; j<n; j++)
	      if ((i+j) % 2 == 0) D[i][j]=--k;
	      else D[i][j]=++l;
	  for (k=0; k<2; k++)
	    for (i=0; i<n; i++)
	      for (j=0; j<n; j++)
	        D[i][j]=MIN(D[i][j], D[i][k]+D[k][j]);
	  return 0;
	}</pre>

Побочной диагональю матрицы называется диагональ, идущая из левого нижнего угла в правый верхний угол.

Решение.

Исходная матрица:

```
  -1   1  -2   2  -3
   3  -4   4  -5   5
  -6   6  -7   7  -8
   8  -9   9 -10  10
 -11  11 -12  12 -13
```

Матрица для k=0:

```
  -2  -1  -4   0  -5
   1  -4  -3  -5  -4
  -8  -9 -12  -8 -13
   6  -9   2 -10   1
 -13 -14 -17 -13 -18
```

Матрица для k=1:

```
  -2  -5  -8 -10  -9
  -3  -8 -11 -13 -12
 -12 -17 -28 -30 -29
 -12 -17 -28 -30 -29
 -17 -22 -33 -35 -34
```

Ответ: -17 -17 -28 -13 -9.

Вариант 8 (условия и ответы)

Задача 1 (8 баллов). Переведите шестнадцатеричное число A_{16} = 147E,59 в десятичную систему счисления.

Ответ: 5246,34765625.

Задача 2 (8 баллов). Сколько существует положительных целых чисел, меньших 1001, которые a) делятся и на 2, и на 3, и на 5? b) делятся на 2, или на 3, или на 5? c) не делятся ни на 2, ни на 3, ни на 5?

Ответ: a) 33; b) 734; c) 267.

Задача 3 (8 баллов). Укажите наибольшее целое число X, при котором логическое выражение
$(10 < X\cdot(X+1)) \rightarrow (10 > (X+1)\cdot(X+2))$ истинно.

Решение.

1) это операция импликации между двумя отношениями: $A_0 = (10 < X\cdot(X+1))$ и $B_0 = (10 > (X+1)\cdot(X+2))$;
2) заметим, что по условию нас интересуют только целые числа, поэтому можно попытаться как-то преобразовать исходное выражение, получив равносильное высказывание (точные значения корней нас совершенно не интересуют!);
3) рассмотрим неравенство $A_0 = (10 < X\cdot(X+1))$: очевидно, что X может быть как положительным, так и отрицательным числом;
4) легко проверить, что в области X >= 0 высказывание A_0 истинно при всех целых X >= 3, а в области X <= 0 – при всех целых X <= -4 (чтобы не запутаться, удобнее использовать нестрогие неравенства);
5) поэтому для целых X можно заменить A_0 на равносильное выражение A = (X <= -4) + (X >= 3);
6) область истинности выражения – объединение двух бесконечных интервалов;
7) теперь рассмотрим второе неравенство $B_0 = (10 > (X+1)\cdot(X+2))$: очевидно, что X так же может быть как положительным, так и отрицательным числом;
8) в области X >= 0 высказывание B_0 истинно при всех целых X <= 1, а в области X <= 0 – при всех целых X >= -4, поэтому для целых X можно заменить B_0 на равносильное выражение B = (-4 <= X <= 0) + (0 <= X <= 1) = (-4 <= X <= 1);
9) область истинности выражения – закрытый интервал;
10) вспомним таблицу истинности операции «импликация»:

A	B	A → B
0	0	1
0	1	1
1	0	0
1	1	1

согласно таблице, заданное выражение истинно везде, кроме областей, где A = 1и B = 0.

11) обратите внимание, что значение 3 уже не входит в эту область, потому что там A = 1и B = 0, то есть импликация дает 0;
12) максимальное целое число в этой области будет 2.

Ответ: 2.

Задача 4 (8 баллов). Сколько существует способов избрания президента, вице-президента, секретаря и казначея среди членов клуба, включающего 8 студентов последнего курса, 10 студентов предпоследнего курса, 15 второкурсников и 20 первокурсников, если a) отсутствуют какие-либо ограничения? b) президентом должен быть студент последнего курса? c) первокурсники могут быть избраны только на должность секретаря?

Ответ: a) 53*52*51*50 = 7027800; b) 8*52*51*50 = 1060800; c) 33*32*20*31 + 33*32*31*30 = 1636800.

Задача 5 (12 баллов). Функция E определена рекурсивно для неотрицательных целых чисел n и k следующим образом: E(n, 0) = 1 для n >= 0; E(n, k) = (2*n-1-k)*E(n-1, k-1) + (k+1)*E(n-1, k) для 0 < k < n. Очевидно, что E(n, n) = 0 при n > 0; E(n, k) = 0 при k > n. Вычислить вручную E(6, 3).

Решение.

Производим вычисления по формуле и результаты заносим в таблицу размером 7x7. В итоге будет получен следующий треугольник:

n	k						
	0	1	2	3	4	5	6

0	1						
1	1	0					
2	1	2	0				
3	1	8	6	0			
4	1	22	58	24	0		
5	1	52	328	444	120	0	
6	1	114	1452	4400	3708	720	0

Ответ: 4400.

Задача 6 (12 баллов). Дана постфиксная (обратная польская) запись арифметического выражения: a b + c – d * e f g h + * – *. Вычислить вручную значение этого выражения для a=8, b=7, c=6, d=5, e=4, f=3, g=2, h=1.

Решение.

Линейная форма представления бинарного дерева выражения будет иметь вид ((((a+b)-c)*d)*(e-(f*(g+h)))). Подставляя значения, получим ((((8+7)-6)*5)*(4-(3*(2+1)))) = -225.

Ответ: -225.

Задача 7 (8 баллов). Определите, что будет напечатано в результате выполнения следующей программы:

Pascal

```
var a: byte=204; b: byte=170;
begin
  writeln(
  byte((a and byte(not(byte(b shl 1)))) shr 2) or
  byte(not(byte(a shl 1))) and byte(b shr 2) );
end.
```

C

```
typedef unsigned char byte;
int main() {
  byte a=204, b=170;
  printf( "%d\n",
  (byte)((a & (byte)(~(byte)(b << 1))) >> 2) |
  (byte)(~(byte)(a << 1)) & (byte)(b >> 2) );
  return 0;
}
```

Ответ: 34.

Задача 8 (8 баллов). Определите, какое число будет напечатано в результате выполнения следующей программы:

Pascal

```
function f(x: integer): integer;
begin
  f:=(x*x-4)*(x*x-4)+6;
end;
var a, b, m, t: integer;
begin
  a:=-10; b:=10; m:=0;
  for t:=a to b do
    if (f(t) < f(t-1)) and (f(t) <f (t+1)) then
      m:=m+1;
writeln(m);
end.
```

C

```
int f(int x) { return (x*x-4)*(x*x-4)+6; }
int main() {
  int t, a=-10, b=10, m=0;
  for (t=a; t<=b; t++)
    if (f(t) < f(t-1) && f(t) < f(t+1)) m++;
  printf("%d\n", m);
  return 0;
}
```

Ответ: 2.

Задача 9 (12 баллов). Чему будет равна сумма элементов матрицы **A** после выполнения следующей программы:

Pascal

```
const n=9;
var A: array[0..n-1,0..n-1] of integer;
    i, k: integer;
begin
  for i:=0 to n-1 do
    for k:=0 to n-1 do A[i,k]:=0;
  for k:=0 to n-1 do
    if (k < n div 2)
    then for i:=k to n-k-1 do A[i,k]:=1
    else for i:=n-k-1 to k do A[i,k]:=1;
end.
```

C

```
const int n=9;
int main() {
  int A[n][n]={0};
  for (int k=0; k<n; k++)
    if (k <= n/2)
      for (int i=k; i<n-k; i++) A[i][k]=1;
    else
      for (int i=n-k-1; i<=k; i++) A[i][k]=1;
  return 0;
}
```

Решение.

Преобразованная матрица:

```
1   0   0   0   0   0   0   0   1
1   1   0   0   0   0   0   1   1
1   1   1   0   0   0   1   1   1
1   1   1   1   0   1   1   1   1
1   1   1   1   1   1   1   1   1
1   1   1   1   0   1   1   1   1
1   1   1   0   0   0   1   1   1
1   1   0   0   0   0   0   1   1
1   0   0   0   0   0   0   0   1
```

Ответ: 49.

Задача 10 (16 баллов). Выпишите элементы побочной диагонали матрицы **D** в конце выполнения следующей программы:

Pascal	**C**

<pre>const n=5;
var D: array[0..n-1,0..n-1] of integer;
var i, j, k, l: integer;
begin
  k:=0; l:=0;
  for i:=0 to n-1 do
    for j:=0 to n-1 do
      if ((i+j) mod 2 = 0)
      then begin k:=k-1; D[i,j]:=k; end
      else begin l:=l+1; D[i,j]:=l; end;
  for k:=0 to 1 do
    for i:=0 to n-1 do
      for j:=0 to n-1 do
        D[i,j]:=max(D[i,j], D[i,k]+D[k,j]);
end.</pre>
	<pre>#define MAX(X,Y) ((X) > (Y) ? (X) : (Y))
	const int n=5;
	int D[n][n];
	int main() {
	  int i, j, k=0, l=0;
	  for (i=0; i<n; i++)
	    for (j=0; j<n; j++)
	      if ((i+j) % 2 == 0) D[i][j]=--k;
	      else D[i][j]=++l;
	  for (k=0; k<2; k++)
	    for (i=0; i<n; i++)
	      for (j=0; j<n; j++)
	        D[i][j]= MAX(D[i][j], D[i][k]+D[k][j]);
	  return 0;
	}</pre>

Побочной диагональю матрицы называется диагональ, идущая из левого нижнего угла в правый верхний угол.

Исходная матрица:

```
 -1   1  -2   2  -3
  3  -4   4  -5   5
 -6   6  -7   7  -8
  8  -9   9 -10  10
-11  11 -12  12 -13
```

Матрица для k=0:

```
 -1   1  -2   2  -3
  3   4   4   5   5
 -6   6  -7   7  -8
  8   9   9  10  10
-11  11 -12  12 -13
```

Матрица для k=1:

```
  4   5   9  10  10
  7   8  12  13  13
 13  14  26  27  27
 16  17  29  30  30
 18  19  31  32  32
```

Ответ: 18 17 26 13 10.

Вариант 10 (условия и ответы)

Задача 1 (8 баллов). Переведите шестнадцатеричное число A_{16} = 147E,59 в десятичную систему счисления.

Ответ: 5246,34765625.

Задача 2 (8 баллов). Сколько существует положительных целых чисел, меньших 1001, которые a) делятся и на 2, и на 3, и на 5? b) делятся на 2, или на 3, или на 5? c) не делятся ни на 2, ни на 3, ни на 5?

Ответ: a) 33; b) 734; c) 267.

Задача 3 (8 баллов). Укажите наибольшее целое число X, при котором логическое выражение
$(10 < X\cdot(X+1)) \rightarrow (10 > (X+1)\cdot(X+2))$ истинно.

Решение.

1) это операция импликации между двумя отношениями: $A_0 = (10 < X\cdot(X+1))$ и $B_0 = (10 > (X+1)\cdot(X+2))$;
2) заметим, что по условию нас интересуют только целые числа, поэтому можно попытаться как-то преобразовать исходное выражение, получив равносильное высказывание (точные значения корней нас совершенно не интересуют!);
3) рассмотрим неравенство $A_0 = (10 < X\cdot(X+1))$: очевидно, что X может быть как положительным, так и отрицательным числом;
4) легко проверить, что в области X >= 0 высказывание A_0 истинно при всех целых X >= 3, а в области X <= 0 – при всех целых X <= -4 (чтобы не запутаться, удобнее использовать нестрогие неравенства);
5) поэтому для целых X можно заменить A_0 на равносильное выражение A = (X <= -4) + (X >= 3);
6) область истинности выражения – объединение двух бесконечных интервалов;
7) теперь рассмотрим второе неравенство $B_0 = (10 > (X+1)\cdot(X+2))$: очевидно, что X так же может быть как положительным, так и отрицательным числом;
8) в области X >= 0 высказывание B_0 истинно при всех целых X <= 1, а в области X <= 0 – при всех целых X >= -4, поэтому для целых X можно заменить B_0 на равносильное выражение B = (-4 <= X <= 0) + (0 <= X <= 1) = (-4 <= X <= 1);
9) область истинности выражения – закрытый интервал;
10) вспомним таблицу истинности операции «импликация»:

A	B	A → B
0	0	1
0	1	1
1	0	0
1	1	1

согласно таблице, заданное выражение истинно везде, кроме областей, где A = 1и B = 0.

11) обратите внимание, что значение 3 уже не входит в эту область, потому что там A = 1и B = 0, то есть импликация дает 0;
12) максимальное целое число в этой области будет 2.

Ответ: 2.

Задача 4 (8 баллов). Сколько существует способов избрания президента, вице-президента, секретаря и казначея среди членов клуба, включающего 8 студентов последнего курса, 10 студентов предпоследнего курса, 15 второкурсников и 20 первокурсников, если a) отсутствуют какие-либо ограничения? b) президентом должен быть студент последнего курса? c) первокурсники могут быть избраны только на должность секретаря?

Ответ: a) 53*52*51*50 = 7027800; b) 8*52*51*50 = 1060800; c) 33*32*20*31 + 33*32*31*30 = 1636800.

Задача 5 (12 баллов). Функция E определена рекурсивно для неотрицательных целых чисел n и k следующим образом: E(n, 0) = 1 для n >= 0; E(n, k) = (2*n-1-k)*E(n-1, k-1) + (k+1)*E(n-1, k) для 0 < k < n. Очевидно, что E(n, n) = 0 при n > 0; E(n, k) = 0 при k > n. Вычислить вручную E(6, 3).

Решение.

Производим вычисления по формуле и результаты заносим в таблицу размером 7x7. В итоге будет получен следующий треугольник:

n	k						
	0	1	2	3	4	5	6

0	1						
1	1	0					
2	1	2	0				
3	1	8	6	0			
4	1	22	58	24	0		
5	1	52	328	444	120	0	
6	1	114	1452	4400	3708	720	0

Ответ: 4400.

Задача 6 (12 баллов). Дана постфиксная (обратная польская) запись арифметического выражения:
a b + c – d * e f g h + * – *. Вычислить вручную значение этого выражения для a=8, b=7, c=6, d=5, e=4, f=3, g=2, h=1.

Решение.

Линейная форма представления бинарного дерева выражения будет иметь вид ((((a+b)-c)*d)*(e-(f*(g+h)))). Подставляя значения, получим ((((8+7)-6)*5)*(4-(3*(2+1)))) = -225.

Ответ: -225.

Задача 7 (8 баллов). Определите, что будет напечатано в результате выполнения следующей программы:

Pascal

```
var a: byte=204; b: byte=170;
begin
  writeln(
  byte((a and byte(not(byte(b shl 1)))) shr 2) or
  byte(not(byte(a shl 1))) and byte(b shr 2) );
end.
```

C

```
typedef unsigned char byte;
int main() {
  byte a=204, b=170;
  printf( "%d\n",
  (byte)((a & (byte)(~(byte)(b << 1))) >> 2) |
  (byte)(~(byte)(a << 1)) & (byte)(b >> 2) );
  return 0;
}
```

Ответ: 34.

Задача 8 (8 баллов). Определите, какое число будет напечатано в результате выполнения следующей программы:

Pascal

```
function f(x: integer): integer;
begin
  f:=(x*x-4)*(x*x-4)+6;
end;
var a, b, m, t: integer;
begin
  a:=-10; b:=10; m:=0;
  for t:=a to b do
    if (f(t) < f(t-1)) and (f(t) <f (t+1)) then
      m:=m+1;
writeln(m);
end.
```

C

```
int f(int x) { return (x*x-4)*(x*x-4)+6; }
int main() {
  int t, a=-10, b=10, m=0;
  for (t=a; t<=b; t++)
    if (f(t) < f(t-1) && f(t) < f(t+1)) m++;
  printf("%d\n", m);
  return 0;
}
```

Ответ: 2.

Задача 9 (12 баллов). Чему будет равна сумма элементов матрицы **A** после выполнения следующей программы:

Pascal

```
const n=9;
var A: array[0..n-1,0..n-1] of integer;
    i, k: integer;
begin
  for i:=0 to n-1 do
    for k:=0 to n-1 do A[i,k]:=0;
  for k:=0 to n-1 do
    if (k < n div 2)
    then for i:=k to n-k-1 do A[i,k]:=1
    else for i:=n-k-1 to k do A[i,k]:=1;
end.
```

C

```
const int n=9;
int main() {
  int A[n][n]={0};
  for (int k=0; k<n; k++)
    if (k <= n/2)
      for (int i=k; i<n-k; i++) A[i][k]=1;
    else
      for (int i=n-k-1; i<=k; i++) A[i][k]=1;
  return 0;
}
```

Решение.

Преобразованная матрица:

```
1   0   0   0   0   0   0   0   1
1   1   0   0   0   0   0   1   1
1   1   1   0   0   0   1   1   1
1   1   1   1   0   1   1   1   1
1   1   1   1   1   1   1   1   1
1   1   1   1   0   1   1   1   1
1   1   1   0   0   0   1   1   1
1   1   0   0   0   0   0   1   1
1   0   0   0   0   0   0   0   1
```

Ответ: 49.

Задача 10 (16 баллов). Выпишите элементы побочной диагонали матрицы **D** в конце выполнения следующей программы:

Pascal	**C**

`const n=5;`
`var D: array[0..n-1,0..n-1] of integer;`
`var i, j, k, l: integer;`
`begin`
`  k:=0; l:=0;`
`  for i:=0 to n-1 do`
`    for j:=0 to n-1 do`
`      if ((i+j) mod 2 = 0)`
`      then begin k:=k-1; D[i,j]:=k; end`
`      else begin l:=l+1; D[i,j]:=l; end;`
`  for k:=0 to 1 do`
`    for i:=0 to n-1 do`
`      for j:=0 to n-1 do`
`        D[i,j]:=max(D[i,j], D[i,k]+D[k,j]);`
`end.`
	`#define MAX(X,Y) ((X) > (Y) ? (X) : (Y))`
	`const int n=5;`
	`int D[n][n];`
	`int main() {`
	`  int i, j, k=0, l=0;`
	`  for (i=0; i<n; i++)`
	`    for (j=0; j<n; j++)`
	`      if ((i+j) % 2 == 0) D[i][j]=--k;`
	`      else D[i][j]=++l;`
	`  for (k=0; k<2; k++)`
	`    for (i=0; i<n; i++)`
	`      for (j=0; j<n; j++)`
	`        D[i][j]= MAX(D[i][j], D[i][k]+D[k][j]);`
	`  return 0;`
	`}`

Побочной диагональю матрицы называется диагональ, идущая из левого нижнего угла в правый верхний угол.

Исходная матрица:

```
 -1   1  -2   2  -3
  3  -4   4  -5   5
 -6   6  -7   7  -8
  8  -9   9 -10  10
-11  11 -12  12 -13
```

Матрица для k=0:

```
 -1   1  -2   2  -3
  3   4   4   5   5
 -6   6  -7   7  -8
  8   9   9  10  10
-11  11 -12  12 -13
```

Матрица для k=1:

```
  4   5   9  10  10
  7   8  12  13  13
 13  14  26  27  27
 16  17  29  30  30
 18  19  31  32  32
```

Ответ: 18 17 26 13 10.

Вариант 11 (условия и ответы)

Задача 1 (8 баллов). Переведите шестнадцатеричное число A_{16} = 32F,C1 в десятичную систему счисления.

Ответ: 815,75390625.

Задача 2 (8 баллов). Сколько существует перестановок букв o, n, t, h, e, g, r, i, d, если a) не существует никаких ограничений? b) последовательности букв образуют слова "on", "the" и "grid" в любом порядке? c) последовательности букв не образуют слова ни "on", ни "the", ни "grid"?

Ответ: a) 9! = 362880; b) 3! = 6; c) 9! – (8! + 7! + 6! – 6! – 5! – 4! + 3!) = 362880 – 45222 = 317658.

Задача 3 (8 баллов). На книжной полке расположены книги по математике, физике, информатике и химии. Какая книга будет выбрана при одновременном выполнении следующих условий: a) если не выбирается химия, то не выбирается физика; b) не верно, что «если выбирается информатика, то выбирается химия»; c) если выбирается математика, то выбирается физика.

Решение.

Введем следующие обозначения: M – математика, P – физика, I – информатика, C – химия. Используя элементарные функции алгебры логики, запишем условие задачи в аналитической форме:

$f(M, P, I, C) = (\neg C \to \neg P) \wedge \neg (I \to C) \wedge (M \to P)$.

Используя свойства функций алгебры логики, выполним преобразования:

$(\neg C \to \neg P) \wedge \neg (I \to C) \wedge (M \to P) =$
$(\neg\neg C \vee \neg P) \wedge \neg (\neg I \vee C) \wedge (\neg M \vee P) =$
$(C \vee \neg P) \wedge (\neg\neg I \wedge \neg C) \wedge (\neg M \vee P) =$
$(C \vee \neg P) \wedge (I \wedge \neg C) \wedge (\neg M \vee P) =$
$(C \wedge I \wedge \neg C \vee \neg P \wedge I \wedge \neg C) \wedge (\neg M \vee P) =$
$(\neg P \wedge I \wedge \neg C) \wedge (\neg M \vee P) =$
$(\neg P \wedge I \wedge \neg C \wedge \neg M \vee P \neg \wedge P \wedge I \wedge \neg C) =$
$(\neg P \wedge I \wedge \neg C \wedge \neg M)$.

Функция f(M, P, I, C) равна единице при следующих значениях переменных: M = 0, P = 0, I = 1, C = 0.

Ответ: Информатика.

Задача 4 (8 баллов). Сколько различных решений имеет система логических уравнений

$(x_1 \to x_2) \wedge (x_2 \to x_3) \wedge (x_3 \to x_4) = 1$
$(y_1 \to y_2) \wedge (y_2 \to y_3) \wedge (y_3 \to y_4) = 1$
$(z_1 \to z_2) \wedge (z_2 \to z_3) \wedge (z_3 \to z_4) = 1$
$x_1 \wedge y_2 \wedge z_3 = 0$

где $x_1, \ldots, x_4, y_1, \ldots, y_4, z_1, \ldots, z_4$, – логические переменные? В ответе не нужно перечислять все различные наборы значений переменных, при которых выполнено данное равенство. В качестве ответа нужно указать количество таких наборов.

Решение.

1) перепишем систему с более понятными обозначениями:

$$(x_1 \to x_2) \cdot (x_2 \to x_3) \cdot (x_3 \to x_4) = 1$$
$$(y_1 \to y_2) \cdot (y_2 \to y_3) \cdot (y_3 \to y_4) = 1$$
$$(z_1 \to z_2) \cdot (z_2 \to z_3) \cdot (z_3 \to z_4) = 1$$
$$x_1 \cdot y_2 \cdot z_3 = 0$$

2) первые 3 уравнения однотипны; рассмотрим первое из них:

$$(x_1 \to x_2) \cdot (x_2 \to x_3) \cdot (x_3 \to x_4) = 1$$

3) рассмотрим решение этого уравнения как битовую цепочку $X = x_1x_2x_3x_4$

4) все импликации должны быть равны 1, в цепочке X запрещена комбинация 10, поэтому после первой единицы далее следуют только единицы; вот все 5 решений X:

X = 0000 0001 0011 0111 1111

5) второе и третье уравнения не зависят от первого и имеют такую же структуру; вот все их решения $Y = y_1y_2y_3y_4$ и $Z = z_1z_2z_3z_4$:

Y =	0000	0001	0011	0111	1111
Z =	0000	0001	0011	0111	1111

6) если бы система состояла бы только из первых трёх уравнений, общее количество решений было бы равно 5 · 5 · 5 = 125
7) теперь рассмотрим последнее уравнение, связывающее *X*, *Y* и *Z*:

$$x_1 \cdot y_2 \cdot z_3 = 0$$

8) таким образом, нужно исключить все решения, где $x_1 = y_2 = z_3 = 1$
9) у нас есть одно решение *X* с $x_1 = 1$, два решения *Y* с $y_2 = 1$ и три решения *Z* с $z_3 = 1$; поэтому из 125 нужно отбросить 1 · 2 · 3 = 6 решений; остаётся 125 – 6 = 119 решений.

Ответ: 119.

Задача 5 (12 баллов). Функция S определена рекурсивно для неотрицательных целых чисел n и k следующим образом: S(0, 0) = 1; S(n, 0) = 0 для n > 0; S(n, k) = S(n-1, k-1) + (n-1)*S(n-1, k) для 0 < k < n. Очевидно, что S(n, n) = 1; S(n, k) = 0 при k > n. Вычислить вручную S(6, 4).

Решение.

Производим вычисления по формуле и результаты заносим в таблицу размером 7x7. В итоге будет получен следующий треугольник:

n	k						
	0	1	2	3	4	5	6
0	1						
1	0	1					
2	0	1	1				
3	0	2	3	1			
4	0	6	11	6	1		
5	0	24	50	35	10	1	
6	0	120	274	225	85	15	1

Ответ: 85.

Задача 6 (12 баллов). Дана постфиксная (обратная польская) запись арифметического выражения:
x a + x * b + x * c + x * d + x * e +. Найдите бинарное дерево, задающее это выражение, и вручную вычислите значение этого выражения для x=3, a=1, b=2, c=3, d=4, e=5.

Решение.

Линейная форма представления бинарного дерева выражения будет иметь вид (((((((((x+a)*x)+b)*x)+c)*x)+d)*x)+e).
Подставляя значения, получим (((((((((3+1)*3)+2)*3)+3)*3)+4)*3)+5) =422.

Ответ: 422.

Задача 7 (8 баллов). Определите, что будет напечатано в результате выполнения следующей программы:

Pascal	C

`var a: byte=141; b: byte=77;`
`begin`
`writeln(`
`byte(not(byte(b shl 1) and byte(b shr 1))) and`
`(byte((a or b) shr 1) or byte((a and b) shl 1)));`
`end.`
	`typedef unsigned char byte;`
	`int main() {`
	`byte a=141, b=77;`
	`printf( "%d\n",`
	`(byte)(~((byte)(b << 1) & (byte)(b >> 1))) &`
	`((byte)((a | b) >> 1) | (byte)((a & b) << 1)) );`
	`return 0;`
	`}`

Ответ: 124

Задача 8 (8 баллов). Определите, какое число будет напечатано в результате выполнения следующей программы:

Pascal	C

`function f(x: integer): integer;`
`begin f:=x*x+4*x+8; end;`
`var a, b, m, r, t: integer;`
	`int f(int x) { return (x*x+4*x+8); }`
	`int main() {`
	`int a=-10, b=10, m=a, r=f(a);`

begin
a:=-10; b:=10; m:=a; r:=f(a);
for t:=a to b do
if (f(t)>r) then begin m:=t; r:=f(t); end;
writeln(r);
end.
	for (int t=a; t<=b; t++)
	if (f(t)>r) { m=t; r=f(t); }
	printf("%4d\n", r);
	}

Ответ: 148.

Задача 9 (12 баллов). Изобразите вид матрицы **A** после выполнения следующей программы и определите, чему будет равна сумма элементов матрицы:

Pascal

```
const n=9;
var A: array[0..n-1,0..n-1] of integer;
i, j: integer;
begin
for i:=0 to n-1 do
for j:=0 to n-1 do A[i,j]:=0;
for i:=0 to n-1 do
for j:=i to n-1 do A[i,j]:=i+j;
end.
```

C

```
const int n=9;
int main() {
int A[n][n]={0};
for (int i=0; i<n; i++)
for (int j=i; j<n; j++) A[i][j]=i+j;
return 0;
}
```

Решение.

Преобразованная матрица:

```
 0   1   2   3   4   5   6   7   8
 0   2   3   4   5   6   7   8   9
 0   0   4   5   6   7   8   9  10
 0   0   0   6   7   8   9  10  11
 0   0   0   0   8   9  10  11  12
 0   0   0   0   0  10  11  12  13
 0   0   0   0   0   0  12  13  14
 0   0   0   0   0   0   0  14  15
 0   0   0   0   0   0   0   0  16
```

Ответ: 360.

Задача 10 (16 баллов). Изобразите вид матрицы **D** после выполнения следующей программы и выпишите элементы ее главной диагонали:

Pascal

```
const n=5;
var D: array[0..n-1,0..n-1] of integer;
var i, j, k, l: integer;
begin
k:=0; l:=0;
for i:=0 to n-1 do
for j:=0 to n-1 do
if ((i+j) mod 2 <> 0) then
begin k:=k-1; D[i,j]:=k; end
else begin l:=l+1; D[i,j]:=l; end;
for k:=0 to 1 do
for j:=0 to n-1 do
for i:=0 to n-1 do
D[i,j]:=min(D[i,j], D[i,k]+D[k,j]);
end.
```

C

```
#define MIN(X,Y) ((X) < (Y) ? (X) : (Y))
const int n=5;
int D[n][n];
int main() {
int i, j, k=0, l=0;
for (i=0; i<n; i++)
for (j=0; j<n; j++)
if ((i+j) % 2 != 0) D[i][j]=--k;
else D[i][j]=++l;
for (k=0; k<2; k++)
for (j=0; j<n; j++)
for (i=0; i<n; i++)
D[i][j]=MIN(D[i][j], D[i][k]+D[k][j]);
return 0;
}
```

Решение.

Исходная матрица:

```
  1  -1   2  -2   3
 -3   4  -4   5  -5
  6  -6   7  -7   8
 -8   9  -9  10 -10
 11 -11  12 -12  13
```

Матрица для k=0:

```
  1  -1   2  -2   3
 -3  -4  -4  -5  -5
  6  -6   7  -7   8
 -8  -9  -9 -10 -10
 11 -11  12 -12  13
```

Матрица для k=1:

```
 -4  -5  -9 -10 -10
 -7  -8 -12 -13 -13
-13 -14 -26 -27 -27
-16 -17 -29 -30 -30
-18 -19 -31 -32 -32
```

Ответ: **-4 -8 -26 -30 -32**

Вариант 12 (условия и ответы)

Задача 1 (8 баллов). Переведите шестнадцатеричное число A_{16} = 32AB,12 в десятичную систему счисления.

Ответ: 12971,0703125.

Задача 2 (8 баллов). Сколько существует перестановок букв o, n, t, h, e, f, a, r, m, если a) не существует никаких ограничений? b) последовательности букв образуют слова "on", "the" и "farm" в любом порядке? c) последовательности букв не образуют слова ни "on", ни "the", ни "farm"?

Ответ: a) 9! = 362880; b) 3! = 6; c) 9! – (8! + 7! + 6! – 6! – 5! – 4! + 3!) = 362880 – 45222 = 317658.

Задача 3 (8 баллов). На книжной полке расположены книги по математике, физике, информатике и химии. Какая книга будет выбрана при одновременном выполнении следующих условий: a) если не выбирается математика, то не выбирается химия; b) не верно, что «если выбирается физика, то выбирается математика»; c) если выбирается информатика, то выбирается химия.

Ответ: Физика.

Задача 4 (8 баллов). Сколько различных решений имеет система логических уравнений

$(x_1 \to x_2) \wedge (x_2 \to x_3) = 1$

$\neg x_1 \wedge y_1 \wedge z_1 \vee x_1 \wedge \neg y_1 \wedge z_1 \vee x_1 \wedge y_1 \wedge \neg z_1 = 1$

$\neg x_2 \wedge y_2 \wedge z_2 \vee x_2 \wedge \neg y_2 \wedge z_2 \vee x_2 \wedge y_2 \wedge \neg z_2 = 1$

$\neg x_3 \wedge y_3 \wedge z_3 \vee x_3 \wedge \neg y_3 \wedge z_3 \vee x_3 \wedge y_3 \wedge \neg z_3 = 1$

где $x_1, \ldots, x_3, y_1, \ldots, y_3, z_1, \ldots, z_3$ – логические переменные? В ответе не нужно перечислять все различные наборы значений переменных, при которых выполнено данное равенство. В качестве ответа нужно указать количество таких наборов.

1) перепишем уравнения с помощью более простых обозначений:
$$(x_1 \to x_2)\cdot(x_2 \to x_3) = 1$$
$$\bar{x}_1 \cdot y_1 \cdot z_1 + x_1 \cdot \bar{y}_1 \cdot z_1 + x_1 \cdot y_1 \cdot \bar{z}_1 = 1$$
$$\bar{x}_2 \cdot y_2 \cdot z_2 + x_2 \cdot \bar{y}_2 \cdot z_2 + x_2 \cdot y_2 \cdot \bar{z}_2 = 1$$
$$\bar{x}_3 \cdot y_3 \cdot z_3 + x_3 \cdot \bar{y}_3 \cdot z_3 + x_3 \cdot y_3 \cdot \bar{z}_3 = 1$$
2) заметим, что последние 3 уравнения независимы друга от друга, и вся система связана только через первое уравнение
3) рассмотрим второе уравнение
$$\bar{x}_1 \cdot y_1 \cdot z_1 + x_1 \cdot \bar{y}_1 \cdot z_1 + x_1 \cdot y_1 \cdot \bar{z}_1 = 1$$
оно имеет три решения, каждое из которых соответствует единичному значению одного из слагаемых:
$$\bar{x}_1 \cdot y_1 \cdot z_1 = 1 \quad \Rightarrow \quad (x_1, y_1, z_1) = (0,1,1)$$
$$x_1 \cdot \bar{y}_1 \cdot z_1 = 1 \quad \Rightarrow \quad (x_1, y_1, z_1) = (1,0,1)$$
$$x_1 \cdot y_1 \cdot \bar{z}_1 = 1 \quad \Rightarrow \quad (x_1, y_1, z_1) = (1,1,0)$$
4) аналогичные уравнения 3-4 тоже имеют по три решения
5) теперь рассмотрим множество решений системы уравнений 2-3
$$\bar{x}_1 \cdot y_1 \cdot z_1 + x_1 \cdot \bar{y}_1 \cdot z_1 + x_1 \cdot y_1 \cdot \bar{z}_1 = 1$$
$$\bar{x}_2 \cdot y_2 \cdot z_2 + x_2 \cdot \bar{y}_2 \cdot z_2 + x_2 \cdot y_2 \cdot \bar{z}_2 = 1$$
при ограничении, которое накладывается первым уравнением:
$$(x_1 \to x_2) = 1$$
6) поскольку импликация дает ложное значение (0) только для случая $1 \to 0$, первое уравнение в исходной системе запрещает комбинацию $(x_1, x_2) = (1,0)$.
7) рассмотрим решение уравнений 2 и 3:

(x_1, y_1, z_1)	(x_2, y_2, z_2)
(0,1,1)	(0,1,1)
(1,0,1)	(1,0,1)
(1,1,0)	(1,1,0)

Эти уравнения независимы, поэтому система уравнений 2-3 (без дополнительных ограничений) имеет $3 \cdot 3 = 9$ решений

При ограничении $(x_1 \to x_2) = 1$:

- в случае $(x_2, y_2, z_2) = (0,1,1)$ имеем только одно решение системы, когда $x_1 = 0$ в уравнении 2, то есть $(x_1, y_1, z_1) = (0,1,1)$
- для двух решений уравнения 3, когда $x_2 = 1$, подходят все 3 отдельных решения уравнения 2

поэтому количество решений системы уравнений 2-3 при ограничении $(x_1 \to x_2) = 1$ вычисляется как 1 + 3 + 3 = 7 решений

8) рассуждая аналогично, подключаем уравнение 4 и ограничение $(x_2 \to x_3) = 1$, получаем, что количество решений системы уравнений 2-4 при ограничении $(x_1 \to x_2) \cdot (x_2 \to x_3) = 1$ вычисляется как 1 + 7 + 7 = 15 решений

Ответ: 15.

Задача 5 (12 баллов). Функция S определена рекурсивно для неотрицательных целых чисел n и k следующим образом: S(0, 0) = 1; S(n, 0) = 0 для n > 0; S(n, k) = S(n-1, k-1) + k*S(n-1, k) для 0 < k < n. Очевидно, что S(n, 1) = 1 при n > 0; S(n, n) = 1; S(n, k) = 0 при k > n. Вычислить вручную S(6, 4).

Решение.

Производим вычисления по формуле и результаты заносим в таблицу размером 7x7. В итоге будет получен следующий треугольник:

n	k						
	0	1	2	3	4	5	6
0	1						
1	0	1					
2	0	1	1				
3	0	1	3	1			
4	0	1	7	6	1		
5	0	1	15	25	10	1	
6	0	1	31	90	65	15	1

Ответ: 65.

Задача 6 (12 баллов). Дана постфиксная (обратная польская) запись арифметического выражения:
a x b x c x d x e x + * + * + * + * +. Найдите бинарное дерево, задающее это выражение, и вручную вычислите значение этого выражения для x=3, a=1, b=2, c=3, d=4, e=5.

Решение.

Линейная форма представления бинарного дерева выражения будет иметь вид: (a+(x*(b+(x*(c+(x*(d+(x*(e+x))))))))).
Подставляя значения, получим (1+(3*(2+(3*(3+(3*(4+(3*(5+2))))))))) = 790.

Ответ: 790.

Задача 7 (8 баллов). Определите, что будет напечатано в результате выполнения следующей программы:

Pascal	C

`var a: byte=217; b: byte=101;`
`begin`
`writeln(`
`byte(not(byte(b shl 1) and byte(b shr 1))) and`
`(byte((a or b) shr 1) or byte((a and b) shl 1)));`
`end.`
	`typedef unsigned char byte;`
	`int main() {`
	`byte a=217, b=101;`
	`printf( "%d\n",`
	`(byte)(~((byte)(b << 1) & (byte)(b >> 1))) &`
	`((byte)((a | b) >> 1) | (byte)((a & b) << 1)) );`
	`return 0;`
	`}`

Ответ: 252.

Задача 8 (8 баллов). Определите, какое число будет напечатано в результате выполнения следующей программы:

Pascal	C

`function f(x: integer): integer;`
`begin f:=4*(x-1)*(x-3); end;`
`var a, b, m, r, t: integer;`
`begin`
`a:=-20; b:=0; m:=a; r:=f(a);`
`for t:=a to b do`
`if (f(t)<r) then begin m:=t; r:=f(t); end;`
	`int f(int x) { return (4*(x-1)*(x-3)); }`
	`int main() {`
	`int a=-20, b=0, m=a, r=f(a);`
	`for (int t=a; t<=b; t++)`
	`if (f(t)<r) { m=t; r=f(t); }`
	`printf("%4d\n", m);`
	`}`

writeln(m); end.	

Ответ: 0.

Задача 9 (12 баллов). Изобразите вид матрицы **A** после выполнения следующей программы и определите, чему будет равна сумма элементов матрицы:

Pascal	C

<pre>const n=9;
var A: array[0..n-1,0..n-1] of integer;
i, j: integer;
begin
for i:=0 to n-1 do
for j:=0 to n-1 do A[i,j]:=0;
for i:=0 to n-1 do
for j:=0 to n-i-1 do A[i,j]:=i+j;
end.</pre>
	<pre>const int n=9;
	int main() {
	int A[n][n]={0};
	for (int i=0; i<n; i++)
	for (int j=0; j<n-i; j++) A[i][j]=i+j;
	return 0;
	}</pre>

Решение.

```
0   1   2   3   4   5   6   7   8
1   2   3   4   5   6   7   8   0
2   3   4   5   6   7   8   0   0
3   4   5   6   7   8   0   0   0
4   5   6   7   8   0   0   0   0
5   6   7   8   0   0   0   0   0
6   7   8   0   0   0   0   0   0
7   8   0   0   0   0   0   0   0
8   0   0   0   0   0   0   0   0
```

Ответ: 240.

Задача 10 (16 баллов). Изобразите вид матрицы **D** после выполнения следующей программы и выпишите элементы ее побочной диагонали:

Pascal	C

<pre>const n=5;
var D: array[0..n-1,0..n-1] of integer;
var i, j, k, l: integer;
begin
k:=0; l:=0;
for i:=0 to n-1 do
for j:=0 to n-1 do
if ((i+j) mod 2 = 0) then
begin k:=k+1; D[i,j]:=k; end
else begin l:=l-1; D[i,j]:=l; end;
for k:=0 to 1 do
for j:=0 to n-1 do
for i:=0 to n-1 do
D[i,j]:=max(D[i,j], D[i,k]+D[k,j]);
end.</pre>
	<pre>#define MAX(X,Y) ((X) > (Y) ? (X) : (Y))
	const int n=5;
	int D[n][n];
	int main() {
	int i, j, k=0, l=0;
	for (i=0; i<n; i++)
	for (j=0; j<n; j++)
	if ((i+j) % 2 == 0) D[i][j]=++k;
	else D[i][j]=--l;
	for (k=0; k<2; k++)
	for (j=0; j<n; j++)
	for (i=0; i<n; i++)
	D[i][j]=MAX(D[i][j], D[i][k]+D[k][j]);
	return 0;
	}</pre>

Побочной диагональю матрицы называется диагональ, идущая из левого нижнего угла в правый верхний угол.

Решение.

Исходная матрица:

```
  1  -1   2  -2   3
 -3   4  -4   5  -5
  6  -6   7  -7   8
 -8   9  -9  10 -10
 11 -11  12 -12  13
```

Матрица для k=0:

```
  2   1   4   0   5
 -1   4   3   5   4
  8   9  12   8  13
 -6   9  -2  10  -1
```

```
  13   14   17   13   18
```

Матрица для k=1:

```
   2    5    8   10    9
   3    8   11   13   12
  12   17   28   30   29
  12   17   28   30   29
  17   22   33   35   34
```

Ответ: 17 17 28 13 9

Вариант 1 (условия, решения, ответы)

Задача 1 (8 баллов). Переведите шестнадцатеричное число $A_{16} = 32F,12$ в десятичную систему счисления.

Решение.

$32F,12 = 3*16^2 + 2*16^1 + 15*16^0 + 1*16^{-1} + 2*16^{-2} = 768 + 32 +15 + 0,0625 + 0,0078125 = 815 + 0,0703125 = 815, 0703125$.

Ответ: 815,0703125.

Задача 2 (8 баллов). Сколько существует перестановок букв *w, e, d, i, g, m, a, t, h*, если a) не существует никаких ограничений? b) последовательности букв образуют слова "*we*", "*dig*" и "*math*" в любом порядке? c) последовательности букв не образуют слова "*we*", "*dig*" и "*math*"?

Ответ: a) 9! = 362880; b) 3! = 6; c) 9! – (8! + 7! + 6! – 6! – 5! – 4! + 3!) = 362880 – 45222 = 317658.

Задача 3 (8 баллов). На книжной полке расположены книги по математике, физике, информатике и химии. Какая книга будет выбрана при одновременном выполнении следующих условий: a) если не выбирается химия, то не выбирается физика; b) не верно, что если выбирается информатика, то выбирается химия; c) если выбирается математика, то выбирается физика.

Решение.

Введем следующие обозначения: M – математика, P – физика, I – информатика, C – химия. Используя элементарные функции алгебры логики, запишем условие задачи в аналитической форме:

$f(M, P, I, C) = (\neg C \to \neg P) \wedge \neg (I \to C) \wedge (M \to P)$.

Используя свойства функций алгебры логики, выполним преобразования:

$(\neg C \to \neg P) \wedge \neg (I \to C) \wedge (M \to P) =$
$(\neg\neg C \vee \neg P) \wedge \neg (\neg I \vee C) \wedge (\neg M \vee P) =$
$(C \vee \neg P) \wedge (\neg\neg I \wedge \neg C) \wedge (\neg M \vee P) =$
$(C \vee \neg P) \wedge (I \wedge \neg C) \wedge (\neg M \vee P) =$
$(C \wedge I \wedge \neg C \vee \neg P \wedge I \wedge \neg C) \wedge (\neg M \vee P) =$
$(\neg P \wedge I \wedge \neg C) \wedge (\neg M \vee P) =$
$(\neg P \wedge I \wedge \neg C \wedge \neg M \vee P \neg \wedge P \wedge I \wedge \neg C) =$
$(\neg P \wedge I \wedge \neg C \wedge \neg M)$.

Функция f(M, P, I, C) равна единице при следующих значениях переменных: M = 0, P = 0, I = 1, C = 0.

Ответ: Информатика.

Задача 4 (12 баллов). Функция S определена рекурсивно для неотрицательных целых чисел n и k следующим образом: S(0, 0) = 1; S(n, 0) = 0 для n > 0; S(n, k) = S(n-1, k-1) + (n-1)*S(n-1, k) для 0 < k < n. Очевидно, что S(n, n) = 1; S(n, k) = 0 при k > n. Вычислить вручную S(6, 4).

Решение.

Производим вычисления по формуле и результаты заносим в таблицу размером 7x7. В итоге будет получен следующий треугольник:

n	k						
	0	1	2	3	4	5	6
0	1						
1	0	1					
2	0	1	1				
3	0	2	3	1			
4	0	6	11	6	1		
5	0	24	50	35	10	1	
6	0	120	274	225	85	15	1

Ответ: 85.

Задача 5 (10 баллов). Дана постфиксная (обратная польская) запись арифметического выражения:
x a + x * b + x * c + x * d + x * e +. Вычислить вручную значение этого выражения для x=2, a=1, b=2, c=3, d=4, e=5.

Решение.

Линейная форма представления бинарного дерева выражения будет иметь вид ((((((((x+a)*x)+b)*x)+c)*x)+d)*x)+e).
Подставляя значения, получим ((((((((2+1)*2)+2)*2)+3)*2)+4)*2)+5) = 89.

Ответ: 89.

Задача 6 (8 баллов). Определите, что будет напечатано в результате выполнения следующей программы:

<table>
<tr><th>Pascal</th><th>C</th></tr>
<tr><td>
<pre>
var a: byte=240; b: byte=15;
begin
writeln(
  byte(not(byte(b shl 1) and byte(b shr 1))) and
  (byte((a or b) shr 1) or byte((a and b) shl 1)));
end.
</pre>
</td><td>
<pre>
typedef unsigned char byte;
int main() {
  byte a=240, b=15;
  printf("%d\n",
  (byte)(~((byte)(b << 1) & (byte)(b >> 1))) &
  ((byte)((a | b) >> 1) | (byte)((a & b) << 1)));
  return 0;
}
</pre>
</td></tr>
</table>

Ответ: 121.

Задача 7 (16 баллов). Выпишите элементы главной диагонали матрицы **A** в конце выполнения следующей программы:

<table>
<tr><th>Pascal</th><th>C</th></tr>
<tr><td>
<pre>
const n=9;
var A: array[0..n-1,0..n-1] of integer;
    i, j, k, t: integer;
begin
  k:=0;
  for i:=0 to n-1 do
    for j:=0 to n-1 do
      begin k:=k+1; A[i,j]:=k; end;
  for j:=0 to (n-1) div 2 do
    for i:=0 to n-1 do begin
      t:=A[i,j]; A[i,j]:=A[i,n-j-1]; A[i,n-j-1]:=t;
    end;
end.
</pre>
</td><td>
<pre>
const int n=9;
int A[n][n];
int main() {
  int i, j, k=0, t;
  for (i=0; i<n; i++)
    for (j=0; j<n; j++) A[i][j]=++k;
  for (j=0; j<n/2; j++)
    for (i=0; i<n; i++) {
      t=A[i][j];
      A[i][j]=A[i][n-j-1];
      A[i][n-j-1]=t;
    }
 return 0;
}
</pre>
</td></tr>
</table>

Решение.

Вид матрицы до преобразования:

```
  1   2   3   4   5   6   7   8   9
 10  11  12  13  14  15  16  17  18
 19  20  21  22  23  24  25  26  27
 28  29  30  31  32  33  34  35  36
 37  38  39  40  41  42  43  44  45
 46  47  48  49  50  51  52  53  54
 55  56  57  58  59  60  61  62  63
 64  65  66  67  68  69  70  71  72
 73  74  75  76  77  78  79  80  81
```

Вид матрицы после преобразования:

```
  9   8   7   6   5   4   3   2   1
 18  17  16  15  14  13  12  11  10
 27  26  25  24  23  22  21  20  19
 36  35  34  33  32  31  30  29  28
 45  44  43  42  41  40  39  38  37
 54  53  52  51  50  49  48  47  46
 63  62  61  60  59  58  57  56  55
 72  71  70  69  68  67  66  65  64
 81  80  79  78  77  76  75  74  73
```

Ответ: 9 17 25 33 41 49 57 65 73.

Вариант 2 (условия, решения, ответы)

Задача 1 (8 баллов). Переведите шестнадцатеричное число A_{16} = 32AB,C1 в десятичную систему счисления.

Решение.

32AB,C1 = $3*16^3 + 2*16^2 + 10*16^1 + 11*16^0 + 12*16^{-1} +1*16^{-2}$ = 12288 + 512 + 160 + 11 + 0,75 + 0,00390635 = 12971 + 0,75390625 = 12971,75390625.

Ответ: 12971,75390625.

Задача 2 (8 баллов). На книжной полке требуется расположить 5 различных книг по математике, 3 различные книги по физике и 2 различные книги по информатике. Сколькими способами это возможно сделать, если a) не существует никаких ограничений? b) все книги по одному и тому же предмету должны стоять вместе? c) все книги по одному и тому же предмету должны стоять вместе, но математические книги и книги по информатике не должны стоять рядом?

Ответ: a) 10! = 3628800; b) 3!*5!*3!*2! = 6*120*6*2 = 8640; c) 2*5!*3!*2! = 2*120*6*2 = 2880.

Задача 3 (8 баллов). В понедельник в одном из классов должно быть проведено 4 урока – по математике, физике, информатике и биологии. Учителя высказали свои пожелания для составления расписания. Учитель математики хочет иметь первый или второй урок, учитель физики - второй или третий урок, учитель информатики – первый или четвертый, учитель биологии – третий или четвертый. Сколько вариантов расписания устроит всех учителей школы?

Ответ: 2.

Задача 4 (12 баллов). Функция S определена рекурсивно для неотрицательных целых чисел n и k следующим образом: S(0, 0) = 1; S(n, 0) = 0 для n > 0; S(n, k) = S(n-1, k-1) + k*S(n-1, k) для 0 < k < n. Очевидно, что S(n, 1) = 1 при n > 0; S(n, n) = 1; S(n, k) = 0 при k > n. Вычислить вручную S(6, 4).

Решение:

Производим вычисления по формуле и результаты заносим в таблицу размером 7x7. В итоге будет получен следующий треугольник:

n	k						
	0	1	2	3	4	5	6
0	1						
1	0	1					
2	0	1	1				
3	0	1	3	1			
4	0	1	7	6	1		
5	0	1	15	25	10	1	
6	0	1	31	90	65	15	1

Ответ: S(6, 4) = 65.

Задача 5 (10 баллов). Дана постфиксная (обратная польская) запись арифметического выражения:
a x b x c x d x e x + * + * + * + * +. Вычислить вручную значение этого выражения для x=2, a=1, b=2, c=3, d=4, e=5.

Решение.

Линейная форма представления бинарного дерева выражения будет иметь вид: (a+(x*(b+(x*(c+(x*(d+(x*(e+x))))))))).
Подставляя значения, получим (1+(2*(2+(2*(3+(2*(4+(2*(5+2))))))))) = 161.

Ответ: 161.

Задача 6 (8 баллов). Определите, что будет напечатано в результате выполнения следующей программы:

Pascal

```
var a: byte=195; b: byte=60;
begin
  writeln(
  byte(not(byte(b shl 1) and byte(b shr 1))) and
  (byte((a or b) shr 1) or byte((a and b) shl 1)));
  readln;
end.
```

C

```
typedef unsigned char byte;
int main() {
  byte a=195, b=60;
  printf( "%d\n",
  (byte)(~((byte)(b << 1) & (byte)(b >> 1))) &
  ((byte)((a | b) >> 1) | (byte)((a & b) << 1)) );
  return 0;
```

	}

Ответ: 103.

Задача 7 (16 баллов). Выпишите элементы главной диагонали матрицы **A** в конце выполнения следующей программы:

<table>
<tr><th>Pascal</th><th>C</th></tr>
<tr><td>

```
const n=9;
var A: array[0..n-1,0..n-1] of integer;
    i, j, k, t: integer;
begin
  k:=0;
  for i:=0 to n-1 do
    for j:=0 to n-1 do
      begin k:=k+1; A[i,j]:=k; end;
  for i:=0 to (n-1) div 2 do
    for j:=0 to n-1 do begin
      t:=A[i,j]; A[i,j]:=A[n-i-1,j]; A[n-i-1,j]:=t;
    end;
end.
```

</td><td>

```
const int n=9;
int A[n][n];
int main() {
  int i, j, k=0, t;
  for (i=0; i<n; i++)
    for (j=0; j<n; j++) A[i][j]=++k;
  for (i=0; i<n/2; i++)
    for (j=0; j<n; j++) {
      t=A[i][j];
      A[i][j]=A[n-i-1][j];
      A[n-i-1][j]=t;
    }
  return 0;
}
```

</td></tr>
</table>

Решение.

Вид матрицы до преобразования:

```
  1   2   3   4   5   6   7   8   9
 10  11  12  13  14  15  16  17  18
 19  20  21  22  23  24  25  26  27
 28  29  30  31  32  33  34  35  36
 37  38  39  40  41  42  43  44  45
 46  47  48  49  50  51  52  53  54
 55  56  57  58  59  60  61  62  63
 64  65  66  67  68  69  70  71  72
 73  74  75  76  77  78  79  80  81
```

Вид матрицы после преобразования:

```
 73  74  75  76  77  78  79  80  81
 64  65  66  67  68  69  70  71  72
 55  56  57  58  59  60  61  62  63
 46  47  48  49  50  51  52  53  54
 37  38  39  40  41  42  43  44  45
 28  29  30  31  32  33  34  35  36
 19  20  21  22  23  24  25  26  27
 10  11  12  13  14  15  16  17  18
  1   2   3   4   5   6   7   8   9
```

Ответ: 73 65 57 49 41 33 25 17 9.

Вариант 3 (условия и ответы)

Задача 1 (8 баллов). Переведите шестнадцатеричное число A_{16} = 13CE,D2 в десятичную систему счисления.

Решение.

13CE,D2 = $1*16^3 + 3*16^2 + 12*16^1 + 14*16^0 + 13*16^{-1} + 2*16^{-2}$ = 4096 + 768 + 192 + 14 + 0,8125 + 0,0078125 = 5070 + 0,8203125 = 5070,8203125.

Ответ: 5070,8203125.

Задача 2 (8 баллов). Сколько существует положительных целых чисел, меньших 1001, которые a) делятся на 3 и на 5? b) делятся на 3 или на 5? c) не делятся ни на 3, ни на 5?

Ответ: a) 66; b) 467; c) 1000 – 467 = 533.

Задача 3 (8 баллов). Укажите наибольшее целое число X, при котором логическое выражение
(50 < X*X) → (50 > (X+1)*(X+1)) истинно.

Решение.

1) это операция импликации между двумя отношениями A = (50 < X^2) и B = (50 > $(X+1)^2$));
2) пусть A = (50 < X^2) – истинно, тогда, с учетом того, что $X^2 > 0$, находим, что B = (50 > $(X+1)^2$)) – ложно, таким образом, импликация A → B ложна;
3) следовательно, импликация может быть истинной только при $X^2 <= 50$; поскольку в этом случае высказывание A ложно, то A → B = 0 → B = 1при любом B;
4) максимальное целое значение X, при котором $X^2 <= 50$, равно 7.

Ответ: 7.

Задача 4 (12 баллов). Функция E определена рекурсивно для неотрицательных целых чисел n и k следующим образом: E(n, 0) = 1 для n >= 0; E(n, k) = (n-k)*E(n-1, k-1) + (k+1)*E(n-1, k) для 0 < k < n. Очевидно, что E(n, n) = 0 при n > 0; E(n, n-1) = 1 при n > 0; E(n, k) = 0 при k > n. Вычислить вручную E(6, 4).

Решение.

Производим вычисления по формуле и результаты заносим в таблицу размером 7x7. В итоге будет получен следующий треугольник:

n	k						
	0	1	2	3	4	5	6
0	1						
1	1	0					
2	1	1	0				
3	1	4	1	0			
4	1	11	11	1	0		
5	1	26	66	26	1	0	
6	1	57	302	302	57	1	0

Ответ: 57.

Задача 5 (10 баллов). Дана постфиксная (обратная польская) запись арифметического выражения:
a b d e f + – + * g h + i j + * *. Вычислить вручную значение этого выражения для a=1, b=2, d=4, e=5, f=6, g=7, h=8, i=9, j=10.

Решение.

Линейная форма представления бинарного дерева выражения будет иметь вид: ((a*(b+(d-(e+f))))*((g+h)*(i+j)).
Подставляя значения, получим ((1*(2+(4-(5+6))))*((7+8)*(9+10)) = -1425.

Ответ: -1425.

Задача 6 (8 баллов). Определите, что будет напечатано в результате выполнения следующей программы:

Pascal	**C**

`const n=3;`
`var i, j, k, sum: integer;`
`begin`
`  sum:=0;`
`  for i:=1 to n do`
`    for j:=1 to i*i do`
`      if (j mod i = 0) then`
`        for k:=1 to j do sum:=sum+1;`
`  writeln(sum);`
`end.`
	`const int n=3;`
	`int main() {`
	`  int sum=0;`
	`  for (int i=1; i<=n; i++)`
	`    for (int j=1; j<=i*i; j++)`
	`      if (j % i == 0)`
	`        for (int k=1; k<=j; k++) sum++;`
	`  printf("%d\n", sum);`
	`  return 0;`
	`}`

Решение.

Проделывая все шаги циклов, и выводя значения i, j, k, sum, получим:

```
1 1 1 1
2 2 1 2
2 2 2 3
2 4 1 4
2 4 2 5
2 4 3 6
2 4 4 7
3 3 1 8
3 3 2 9
3 3 3 10
3 6 1 11
3 6 2 12
3 6 3 13
3 6 4 14
3 6 5 15
3 6 6 16
3 9 1 17
3 9 2 18
3 9 3 19
3 9 4 20
3 9 5 21
3 9 6 22
3 9 7 23
3 9 8 24
3 9 9 25
```

Ответ: 25.

Задача 7 (16 баллов). Определите, что будет напечатано в результате выполнения следующей программы:

Pascal	C

`const n=5;`
`var D: array[0..n-1,0..n-1] of integer;`
`    i, j, p, q: integer;`
`begin`
`  for i:=0 to n-1 do`
`    for j:=0 to n-1 do`
`      if (i mod (j+1) = 0) then D[i,j]:=i+j`
`      else D[i,j]:=i-j;`
`  p:=High(integer);`
`  for i:=0 to n-1 do begin`
`    q:=Low(integer);`
`    for j:=0 to n-1 do q:=max(q, D[i,j]);`
`    p:=min(p, q);`
`  end;`
`  writeln(p);`
`end.`
	`#include <limits.h>`
	`#define MIN(X,Y) ((X) < (Y) ? (X) : (Y))`
	`#define MAX(X,Y) ((X) > (Y) ? (X) : (Y))`
	`const int n=5;`
	`int D[n][n];`
	`int main() {`
	`  int i, j, p, q;`
	`  for (i=0; i<n; i++)`
	`    for (j=0; j<n; j++)`
	`      if (i % (j+1) == 0) D[i][j]=i+j;`
	`      else D[i][j]=i-j;`
	`  p=INT_MAX;`
	`  for (i=0; i<n; i++) {`
	`    q=INT_MIN;`
	`    for (j=0; j<n; j++) q=MAX(q, D[i][j]);`
	`    p=MIN(p, q);`
	`  }`
	`  printf( "%4d\n", p );`
	`  return 0;`
	`}`

Решение.

После заполнения матрицы будет иметь вид:

```
   0   1   2   3   4
```

```
1   0  -1  -2  -3
2   3   0  -1  -2
3   2   5   0  -1
4   5   2   7   0
```

Минимум среди максимумов строк матрицы будет равен 1.

Ответ: 1.

Вариант 4 (условия, решения, ответы)

Задача 1 (8 баллов). Переведите шестнадцатеричное число A_{16} = 147E,59 в десятичную систему счисления.

Решение.

147E,59 = $1*16^3 + 4*16^2 + 7*16^1 + 14*16^0 + 5*16^{-1} + 9*16^{-2}$ = 4096 + 1024 + 112 + 14 + 0,3125 + 0,03515625 = 5246 + 0,34765625 = 5246,34765625.

Ответ: 5246,34765625.

Задача 2 (8 баллов). Сколько существует трехзначных чисел, если a) используются цифры 2, 3, 4, 5, 6, 8, 9, где цифры не должны повторяться? b) сколько таких трехзначных чисел меньше 450? c) сколько таких трехзначных чисел делится на 4.

Ответ: a) 7!/4! = 210; b) 2*(6!/4!) + 2*5 = 2*30+2*5 = 60 + 10 = 70; c) (4*(6!/4!))/2 = 4*30/2 = 60.

Задача 3 (8 баллов). Укажите наибольшее целое число X, при котором логическое выражение
$(10 < X\cdot(X+1)) \to (10 > (X+1)\cdot(X+2))$ истинно.

Решение.

1) это операция импликации между двумя отношениями: $A_0 = (10 < X\cdot(X+1))$ и $B_0 = (10 > (X+1)\cdot(X+2))$;
2) заметим, что по условию нас интересуют только целые числа, поэтому можно попытаться как-то преобразовать исходное выражение, получив равносильное высказывание (точные значения корней нас совершенно не интересуют!);
3) рассмотрим неравенство $A_0 = (10 < X\cdot(X+1))$: очевидно, что X может быть как положительным, так и отрицательным числом;
4) легко проверить, что в области X >= 0 высказывание A_0 истинно при всех целых X >= 3, а в области X <= 0 – при всех целых X <= -4 (чтобы не запутаться, удобнее использовать нестрогие неравенства);
5) поэтому для целых X можно заменить A_0 на равносильное выражение A = (X <= -4) + (X >= 3);
6) область истинности выражения – объединение двух бесконечных интервалов;
7) теперь рассмотрим второе неравенство $B_0 = (10 > (X+1)\cdot(X+2))$: очевидно, что X так же может быть как положительным, так и отрицательным числом;
8) в области X >= 0 высказывание B_0 истинно при всех целых X <= 1, а в области X <= 0 – при всех целых X >= -4, поэтому для целых X можно заменить B_0 на равносильное выражение B = (-4 <= X <= 0) + (0 <= X <= 1) = (-4 <= X <= 1);
9) область истинности выражения – закрытый интервал;
10) вспомним таблицу истинности операции «импликация»:

A	B	A → B
0	0	1
0	1	1
1	0	0
1	1	1

согласно таблице, заданное выражение истинно везде, кроме областей, где A = 1и B = 0.

11) обратите внимание, что значение 3 уже не входит в эту область, потому что там A = 1и B = 0, то есть импликация дает 0;
12) максимальное целое число в этой области будет 2.

Ответ: 2.

Задача 4 (12 баллов). Функция E определена рекурсивно для неотрицательных целых чисел n и k следующим образом: E(n, 0) = 1 для n >= 0; E(n, k) = (2*n-1-k)*E(n-1, k-1) + (k+1)*E(n-1, k) для 0 < k < n. Очевидно, что E(n, n) = 0 при n > 0; E(n, k) = 0 при k > n. Вычислить вручную E(6, 4).

Решение.

Производим вычисления по формуле и результаты заносим в таблицу размером 7x7. В итоге будет получен следующий треугольник:

n	k						
	0	1	2	3	4	5	6
0	1						

1	1	0					
2	1	2	0				
3	1	8	6	0			
4	1	22	58	24	0		
5	1	52	328	444	120	0	
6	1	114	1452	4400	3708	720	0

Ответ: 3708.

Задача 5 (10 баллов). Дана префиксная запись арифметического выражения: * * a + b – d + e f * * + g h + i j. Вычислить вручную значение этого выражения для a=10, b=9, d=7, e=6, f=5, g=4, h=3, i=2, j=1.

Решение.

Линейная форма представления бинарного дерева выражения будет иметь вид: ((a*(b+(d-(e+f))))*((g+h)*(i+j)).
Подставляя значения, получим ((10*(9+(7-(6+5))))*((4+3)*(2+1)) = 1050.

Ответ: 1050.

Задача 6 (8 баллов). Определите, что будет напечатано в результате выполнения следующей программы:

Pascal	C

<pre>const n=3;
var i, j, k, sum: integer;
begin
  sum:=0;
  for i:=1 to n do
    for j:=1 to i*i do
      if not(j mod i = 0) then
        for k:=1 to j do sum:=sum+1;
  writeln(sum);
end.</pre>
	<pre>const int n=3;
	int main() {
	  int sum=0;
	  for (int i=1; i<=n; i++)
	    for (int j=1; j<=i*i; j++)
	      if (j % i != 0)
	        for (int k=1; k<=j; k++) sum++;
	  printf("%d\n", sum);
	  return 0;
	}</pre>

Решение.

Проделывая все шаги циклов, и выводя значения i, j, k, sum, получим:

```
2 1 1 1
2 3 1 2
2 3 2 3
2 3 3 4
3 1 1 5
3 2 1 6
3 2 2 7
3 4 1 8
3 4 2 9
3 4 3 10
3 4 4 11
3 5 1 12
3 5 2 13
3 5 3 14
3 5 4 15
3 5 5 16
3 7 1 17
3 7 2 18
3 7 3 19
3 7 4 20
3 7 5 21
3 7 6 22
3 7 7 23
3 8 1 24
3 8 2 25
3 8 3 26
3 8 4 27
3 8 5 28
3 8 6 29
3 8 7 30
3 8 8 31
```

Ответ: 31.

Задача 7 (16 баллов). Определите, что будет напечатано в результате выполнения следующей программы:

<table>
<tr><th>Pascal</th><th>C</th></tr>
<tr><td>

```
const n=5;
var D: array[0..n-1,0..n-1] of integer;
    i, j, p, q: integer;
begin
  for i:=0 to n-1 do
    for j:=0 to n-1 do
      if (i mod (j+1) = 0) then D[i,j]:=i+j
      else D[i,j]:=i-j;
  p:=Low(integer);
  for i:=0 to n-1 do begin
    q:=High(integer);
    for j:=0 to n-1 do q:=min(q, D[i,j]);
    p:=max(p, q);
  end;
  writeln(p);
end.
```

</td><td>

```
#include <limits.h>
#define MIN(X,Y) ((X) < (Y) ? (X) : (Y))
#define MAX(X,Y) ((X) > (Y) ? (X) : (Y))
const int n=5;
int D[n][n];
int main() {
  int i, j, p, q;
  for (i=0; i<n; i++)
    for (j=0; j<n; j++)
      if (i % (j+1) == 0) D[i][j]=i+j;
      else D[i][j]=i-j;
  p=INT_MIN;
  for (i=0; i<n; i++) {
    q=INT_MAX;
    for (j=0; j<n; j++) q=MIN(q, D[i][j]);
    p=MAX(p, q);
  }
  printf( "%d\n", p );
  return 0;
}
```

</td></tr>
</table>

Решение.

После заполнения матрица будет иметь вид:

```
0   1   2   3   4
1   0  -1  -2  -3
2   3   0  -1  -2
3   2   5   0  -1
4   5   2   7   0
```

Максимум среди минимумов строк матрицы будет равен 0.

Ответ: 0.

Вариант 15 (условия, решения, ответы)

Задача 1 (8 баллов). Переведите шестнадцатеричное число A_{16} = 32F,C1 в десятичную систему счисления.

Решение.

32F,C1 = $3*16^2 + 2*16^1 + 15*16^0 + 12*16^{-1} + 1*16^{-2}$ = 768 + 32 +15 + 0,75 + 0,00390635 = 815 + 0,75390625 = 815,75390625.

Ответ: 815,75390625.

Задача 2 (8 баллов). Сколько существует перестановок букв o, n, t, h, e, g, r, i, d, если a) не существует никаких ограничений? b) последовательности букв образуют слова "on", "the" и "grid" в любом порядке? c) последовательности букв не образуют слова ни "on", ни "the", ни "grid"?

Ответ: a) 9! = 362880; b) 3! = 6; c) 9! – (8! + 7! + 6! – 6! – 5! – 4! + 3!) = 362880 – 45222 = 317658.

Задача 3 (8 баллов). Сколько различных решений имеет система логических уравнений

$(x_1 \to x_2) \wedge (x_2 \to x_3) \wedge (x_3 \to x_4) = 1$
$(y_1 \to y_2) \wedge (y_2 \to y_3) \wedge (y_3 \to y_4) = 1$
$(z_1 \to z_2) \wedge (z_2 \to z_3) \wedge (z_3 \to z_4) = 1$
$x_1 \wedge y_2 \wedge z_3 = 0$

где x_1, …, x_4, y_1, …, y_4, z_1, …, z_4, – логические переменные? В ответе не нужно перечислять все различные наборы значений переменных, при которых выполнено данное равенство. В качестве ответа нужно указать количество таких наборов.

Решение.

1) перепишем систему с более понятными обозначениями:
$$(x_1 \to x_2) \cdot (x_2 \to x_3) \cdot (x_3 \to x_4) = 1$$
$$(y_1 \to y_2) \cdot (y_2 \to y_3) \cdot (y_3 \to y_4) = 1$$
$$(z_1 \to z_2) \cdot (z_2 \to z_3) \cdot (z_3 \to z_4) = 1$$
$$x_1 \cdot y_2 \cdot z_3 = 0$$
2) первые 3 уравнения однотипны; рассмотрим первое из них:
$$(x_1 \to x_2) \cdot (x_2 \to x_3) \cdot (x_3 \to x_4) = 1$$
3) рассмотрим решение этого уравнения как битовую цепочку $X = x_1x_2x_3x_4$
4) все импликации должны быть равны 1, в цепочке *X* запрещена комбинация 10, поэтому после первой единицы далее следуют только единицы; вот все 5 решений *X*:
   X = 0000 0001 0011 0111 1111
5) второе и третье уравнения не зависят от первого и имеют такую же структуру; вот все их решения $Y = y_1y_2y_3y_4$ и $Z = z_1z_2z_3z_4$:
   Y = 0000 0001 0011 0111 1111
   Z = 0000 0001 0011 0111 1111
6) если бы система состояла бы только из первых трёх уравнений, общее количество решений было бы равно 5 · 5 · 5 = 125
7) теперь рассмотрим последнее уравнение, связывающее *X*, *Y* и *Z*:
$$x_1 \cdot y_2 \cdot z_3 = 0$$
8) таким образом, нужно исключить все решения, где $x_1 = y_2 = z_3 = 1$
9) у нас есть одно решение *X* с $x_1 = 1$, два решения *Y* с $y_2 = 1$ и три решения *Z* с $z_3 = 1$; поэтому из 125 нужно отбросить 1 · 2 · 3 = 6 решений; остаётся 125 – 6 = 119 решений

Ответ: 119.

Задача 4 (12 баллов). Функция S определена рекурсивно для неотрицательных целых чисел n и k следующим образом: S(0, 0) = 1; S(n, 0) = 0 для n > 0; S(n, k) = S(n-1, k-1) + (n-1)*S(n-1, k) для 0 < k < n. Очевидно, что S(n, n) = 1; S(n, k) = 0 при k > n. Вычислить вручную S(6, 4).

Решение.

Производим вычисления по формуле и результаты заносим в таблицу размером 7х7. В итоге будет получен следующий треугольник:

n	k						
	0	1	2	3	4	5	6
0	1						
1	0	1					
2	0	1	1				
3	0	2	3	1			
4	0	6	11	6	1		
5	0	24	50	35	10	1	
6	0	120	274	225	85	15	1

Ответ: S(6, 4) = 85.

Задача 5 (10 баллов). Дана постфиксная (обратная польская) запись арифметического выражения:
x a + x * b + x * c + x * d + x * e +. Найдите бинарное дерево, задающее это выражение, и вручную вычислите значение этого выражения для x=3, a=1, b=2, c=3, d=4, e=5.

Решение.

Линейная форма представления бинарного дерева выражения будет иметь вид ((((((((x+a)*x)+b)*x)+c)*x)+d)*x)+e).
Подставляя значения, получим ((((((((3+1)*3)+2)*3)+3)*3)+4)*3)+5) = 422.

Ответ: 422.

Задача 6 (8 баллов). Определите, что будет напечатано в результате выполнения следующей программы:

Pascal

```pascal
var a: byte=141; b: byte=77;
begin
writeln(
byte(not(byte(b shl 1) and byte(b shr 1))) and
(byte((a or b) shr 1) or byte((a and b) shl 1)));
end.
```

C

```c
typedef unsigned char byte;
int main() {
byte a=141, b=77;
printf( "%d\n",
(byte)(~((byte)(b << 1) & (byte)(b >> 1))) &
((byte)((a | b) >> 1) | (byte)((a & b) << 1)) );
return 0;
}
```

Ответ: 124

Задача 7 (16 баллов). Изобразите вид матрицы **D** после выполнения следующей программы и выпишите элементы ее главной диагонали:

Pascal

```pascal
const n=5;
var D: array[0..n-1,0..n-1] of integer;
var i, j, k, l: integer;
begin
k:=0; l:=0;
for i:=0 to n-1 do
for j:=0 to n-1 do
if ((i+j) mod 2 <> 0) then
begin k:=k-1; D[i,j]:=k; end
else begin l:=l+1; D[i,j]:=l; end;
for k:=0 to 1 do
for j:=0 to n-1 do
for i:=0 to n-1 do
D[i,j]:=min(D[i,j], D[i,k]+D[k,j]);
end.
```

C

```c
#define MIN(X,Y) ((X) < (Y) ? (X) : (Y))
const int n=5;
int D[n][n];
int main() {
int i, j, k=0, l=0;
for (i=0; i<n; i++)
for (j=0; j<n; j++)
if ((i+j) % 2 != 0) D[i][j]=--k;
else D[i][j]=++l;
for (k=0; k<2; k++)
for (j=0; j<n; j++)
for (i=0; i<n; i++)
D[i][j]=MIN(D[i][j], D[i][k]+D[k][j]);
return 0;
}
```

Решение.

Исходная матрица:

```
  1  -1   2  -2   3
 -3   4  -4   5  -5
  6  -6   7  -7   8
 -8   9  -9  10 -10
 11 -11  12 -12  13
```

Матрица для k=0:

```
  1  -1   2  -2   3
 -3  -4  -4  -5  -5
  6  -6   7  -7   8
 -8  -9  -9 -10 -10
 11 -11  12 -12  13
```

Матрица для k=1:

```
 -4  -5  -9 -10 -10
 -7  -8 -12 -13 -13
-13 -14 -26 -27 -27
-16 -17 -29 -30 -30
-18 -19 -31 -32 -32
```

Ответ: **-4 -8 -26 -30 -32**

Вариант 16 (условия, решения, ответы)

Задача 1 (8 баллов). Переведите шестнадцатеричное число A_{16} = 32AB,12 в десятичную систему счисления.

Решение.

32AB,12 = $3*16^3 + 2*16^2 + 10*16^1 + 11*16^0 + 1*16^{-1} + 2*16^{-2}$ = 12288 + 512 + 160 + 11 + 0,75 + 0,00390635 = 12971 + 0,0703125 = 12971,0703125.

Ответ: 12971,0703125.

Задача 2 (8 баллов). Сколько существует перестановок букв o, n, t, h, e, f, a, r, m, если a) не существует никаких ограничений? b) последовательности букв образуют слова "on", "the" и "farm" в любом порядке? c) последовательности букв не образуют слова ни "on", ни "the", ни "farm"?

Ответ: a) 9! = 362880; b) 3! = 6; c) 9! – (8! + 7! + 6! – 6! – 5! – 4! + 3!) = 362880 – 45222 = 317658.

Задача 3 (8 баллов). Сколько различных решений имеет система логических уравнений

$(x_1 \to x_2) \wedge (x_2 \to x_3) = 1$

$\neg x_1 \wedge y_1 \wedge z_1 \vee x_1 \wedge \neg y_1 \wedge z_1 \vee x_1 \wedge y_1 \wedge \neg z_1 = 1$

$\neg x_2 \wedge y_2 \wedge z_2 \vee x_2 \wedge \neg y_2 \wedge z_2 \vee x_2 \wedge y_2 \wedge \neg z_2 = 1$

$\neg x_3 \wedge y_3 \wedge z_3 \vee x_3 \wedge \neg y_3 \wedge z_3 \vee x_3 \wedge y_3 \wedge \neg z_3 = 1$

где x_1, …, x_3, y_1, …, y_3, z_1, …, z_3 – логические переменные? В ответе не нужно перечислять все различные наборы значений переменных, при которых выполнено данное равенство. В качестве ответа нужно указать количество таких наборов.

Решение.

1) перепишем уравнения с помощью более простых обозначений:

$$(x_1 \to x_2)\cdot(x_2 \to x_3) = 1$$
$$\bar{x}_1 \cdot y_1 \cdot z_1 + x_1 \cdot \bar{y}_1 \cdot z_1 + x_1 \cdot y_1 \cdot \bar{z}_1 = 1$$
$$\bar{x}_2 \cdot y_2 \cdot z_2 + x_2 \cdot \bar{y}_2 \cdot z_2 + x_2 \cdot y_2 \cdot \bar{z}_2 = 1$$
$$\bar{x}_3 \cdot y_3 \cdot z_3 + x_3 \cdot \bar{y}_3 \cdot z_3 + x_3 \cdot y_3 \cdot \bar{z}_3 = 1$$

2) заметим, что последние 3 уравнения независимы друга от друга, и вся система связана только через первое уравнение
3) рассмотрим второе уравнение

$$\bar{x}_1 \cdot y_1 \cdot z_1 + x_1 \cdot \bar{y}_1 \cdot z_1 + x_1 \cdot y_1 \cdot \bar{z}_1 = 1$$

оно имеет три решения, каждое из которых соответствует единичному значению одного из слагаемых:

$$\bar{x}_1 \cdot y_1 \cdot z_1 = 1 \;\Rightarrow\; (x_1, y_1, z_1) = (0,1,1)$$
$$x_1 \cdot \bar{y}_1 \cdot z_1 = 1 \;\Rightarrow\; (x_1, y_1, z_1) = (1,0,1)$$
$$x_1 \cdot y_1 \cdot \bar{z}_1 = 1 \;\Rightarrow\; (x_1, y_1, z_1) = (1,1,0)$$

4) аналогичные уравнения 3-4 тоже имеют по три решения
5) теперь рассмотрим множество решений системы уравнений 2-3

$$\bar{x}_1 \cdot y_1 \cdot z_1 + x_1 \cdot \bar{y}_1 \cdot z_1 + x_1 \cdot y_1 \cdot \bar{z}_1 = 1$$
$$\bar{x}_2 \cdot y_2 \cdot z_2 + x_2 \cdot \bar{y}_2 \cdot z_2 + x_2 \cdot y_2 \cdot \bar{z}_2 = 1$$

при ограничении, которое накладывается первым уравнением:

$$(x_1 \to x_2) = 1$$

6) поскольку импликация дает ложное значение (0) только для случая 1→0, первое уравнение в исходной системе запрещает комбинацию $(x_1, x_2) = (1,0)$.
7) рассмотрим решение уравнений 2 и 3:

(x_1, y_1, z_1)	(x_2, y_2, z_2)
(0,1,1) (1,0,1) (1,1,0)	(0,1,1) (1,0,1) (1,1,0)

Эти уравнения независимы, поэтому система уравнений 2-3 (без дополнительных ограничений) имеет 3·3=9 решений

При ограничении $(x_1 \to x_2) = 1$:

- в случае $(x_2, y_2, z_2) = (0,1,1)$ имеем только одно решение системы, когда $x_1 = 0$ в уравнении 2, то есть $(x_1, y_1, z_1) = (0,1,1)$
- для двух решений уравнения 3, когда $x_2 = 1$, подходят все 3 отдельных решения уравнения 2

поэтому количество решений системы уравнений 2-3 при ограничении $(x_1 \to x_2) = 1$ вычисляется как 1 + 3 + 3 = 7 решений

8) рассуждая аналогично, подключаем уравнение 4 и ограничение $(x_2 \to x_3) = 1$, получаем, что количество решений системы уравнений 2-4 при ограничении $(x_1 \to x_2) \cdot (x_2 \to x_3) = 1$ вычисляется как 1 + 7 + 7 = 15 решений

Ответ: 15.

Задача 4 (12 баллов). Функция S определена рекурсивно для неотрицательных целых чисел n и k следующим образом: S(0, 0) = 1; S(n, 0) = 0 для n > 0; S(n, k) = S(n-1, k-1) + k*S(n-1, k) для 0 < k < n. Очевидно, что S(n, 1) = 1 при n > 0; S(n, n) = 1; S(n, k) = 0 при k > n. Вычислить вручную S(6, 4).

Решение.

Производим вычисления по формуле и результаты заносим в таблицу размером 7x7. В итоге будет получен следующий треугольник:

n	k						
	0	1	2	3	4	5	6
0	1						
1	0	1					
2	0	1	1				
3	0	1	3	1			
4	0	1	7	6	1		
5	0	1	15	25	10	1	
6	0	1	31	90	65	15	1

Ответ: S(6, 4) = 65.

Задача 5 (10 баллов). Дана постфиксная (обратная польская) запись арифметического выражения:
a x b x c x d x e x + * + * + * + * +. Найдите бинарное дерево, задающее это выражение, и вручную вычислите значение этого выражения для x=3, a=1, b=2, c=3, d=4, e=5.

Решение.

Линейная форма представления бинарного дерева выражения будет иметь вид: (a+(x*(b+(x*(c+(x*(d+(x*(e+x))))))))).
Подставляя значения, получим (1+(3*(2+(3*(3+(3*(4+(3*(5+2))))))))) = 790.

Ответ: 790.

Задача 6 (8 баллов). Определите, что будет напечатано в результате выполнения следующей программы:

Pascal

```
var a: byte=217; b: byte=101;
begin
writeln(
byte(not(byte(b shl 1) and byte(b shr 1))) and
(byte((a or b) shr 1) or byte((a and b) shl 1)));
end.
```

C

```
typedef unsigned char byte;
int main() {
byte a=217, b=101;
printf( "%d\n",
(byte)(~((byte)(b << 1) & (byte)(b >> 1))) &
((byte)((a | b) >> 1) | (byte)((a & b) << 1)) );
return 0;
}
```

Ответ: 252.

Задача 7 (16 баллов). Изобразите вид матрицы **D** после выполнения следующей программы и выпишите элементы ее побочной диагонали:

Pascal

```
const n=5;
var D: array[0..n-1,0..n-1] of integer;
var i, j, k, l: integer;
begin
k:=0; l:=0;
for i:=0 to n-1 do
```

C

```
#define MAX(X,Y) ((X) > (Y) ? (X) : (Y))
const int n=5;
int D[n][n];
int main() {
int i, j, k=0, l=0;
for (i=0; i<n; i++)
```

for j:=0 to n-1 do
if ((i+j) mod 2 = 0) then
begin k:=k+1; D[i,j]:=k; end
else begin l:=l-1; D[i,j]:=l; end;
for k:=0 to 1 do
for j:=0 to n-1 do
for i:=0 to n-1 do
D[i,j]:=max(D[i,j], D[i,k]+D[k,j]);
end.
	for (j=0; j<n; j++)
	if ((i+j) % 2 == 0) D[i][j]=++k;
	else D[i][j]=--l;
	for (k=0; k<2; k++)
	for (j=0; j<n; j++)
	for (i=0; i<n; i++)
	D[i][j]=MAX(D[i][j], D[i][k]+D[k][j]);
	return 0;
	}

Побочной диагональю матрицы называется диагональ, идущая из левого нижнего угла в правый верхний угол.

Решение.

Исходная матрица:

```
  1  -1   2  -2   3
 -3   4  -4   5  -5
  6  -6   7  -7   8
 -8   9  -9  10 -10
 11 -11  12 -12  13
```

Матрица для k=0:

```
  2   1   4   0   5
 -1   4   3   5   4
  8   9  12   8  13
 -6   9  -2  10  -1
 13  14  17  13  18
```

Матрица для k=1:

```
  2   5   8  10   9
  3   8  11  13  12
 12  17  28  30  29
 12  17  28  30  29
 17  22  33  35  34
```

Ответ: **17 17 28 13 9**

Вариант 17 (условия, решения, ответы)

Задача 1 (8 баллов). Переведите десятичное число A_{10} = 273,9375 в шестнадцатеричную систему счисления.

Ответ: 111,F.

Задача 2 (8 баллов). Шесть мальчиков и шесть девочек идут на концерт вместе. Сколькими способами они могут занять места, если а) все мальчики сядут вместе? б) два мальчика сядут по краям? в) ни мальчики, ни девочки не будут сидеть все вместе?

Решение.

1) Пусть универсум **U** будет множеством всех размещений мальчиков и девочек. Следовательно, |**U**| = 12!.
2) Пусть D – множество всех размещений мальчиков и девочек, когда девочки будут сидеть вместе. Тогда |D| = 6!*7!.
3) Пусть M – множество всех размещений мальчиков и девочек, когда мальчики будут сидеть вместе. Тогда |M| = 6!*7!.
4) Двух мальчиков можно посадить по краям 6!/(6-2)! = 6!/4! = 6*5 = 30 способами. Количество размещений мальчиков и девочек, когда два мальчика будут сидеть по краям равно 30*10!.
5) Количество размещений мальчиков и девочек, когда ни мальчики, ни девочки не будут сидеть все вместе, равно |**U**| - (|D| + |M| - |D $\cap$ M|) = 12! – (6!*7! + 6!*7! – 2*6!*6!).

Ответ: а) 6!*7!; б) 30*10!; в) 12! – (6!*7! + 6!*7! – 2*6!*6!) = 12! – (2*6!*7! – 2*6!*6!).

Задача 3 (8 баллов). Сколько различных решений имеет система логических уравнений

$$((\neg x_1 \to y_1) \wedge z_1) \equiv ((\neg x_2 \vee y_2) \to z_2)$$
$$((\neg x_2 \to y_2) \wedge z_2) \equiv ((\neg x_3 \vee y_3) \to z_3)$$

где x_1, …, x_3, y_1, …, y_3 – логические переменные? В ответе не нужно перечислять все различные наборы значений переменных, при которых выполнено данное равенство. В качестве ответа нужно указать количество таких наборов.

Решение.

1) перепишем систему уравнений в более понятном виде:

$$(\bar{x}_1 \to y_1)\cdot z_1 = (\bar{x}_2 + y_2) \to z_2$$
$$(\bar{x}_2 \to y_2)\cdot z_2 = (\bar{x}_3 + y_3) \to z_3$$

2) рассмотрим первое уравнение

$$(\bar{x}_1 \to y_1)\cdot z_1 = (\bar{x}_2 + y_2) \to z_2$$

его левая часть равна 1, если $(x_1, y_1) = (0,1), (1,0), (1,1)$ при z_1 = 1; таким образом, есть всего 3 различных варианта, дающих 1 в левой части:

$$(x_1, y_1, z_1) = (011), (101), (111)$$

3) в левой части первого уравнения 3 переменных, поэтому всего есть 2^3 = 8 комбинаций этих данных; в оставшихся 5 комбинациях левая часть первого уравнения равна 0

	1-е уравнение	
обе части равны…	$x_1y_1z_1$	$x_2y_2z_2$
1	011 101 111	
0	000 001 010 100 110	

4) аналогично находим, что правая часть первого уравнения равна 0 при 3-х комбинациях переменных $(x_2, y_2, z_2) = (000), (010), (110)$, причём каждой из них соответствует 5 троек (x_1, y_1, z_1); эта же правая часть равна 1 для пяти остальных комбинаций (x_2, y_2, z_2), причём каждой из них соответствует 3 комбинации (x_1, y_1, z_1):

	1-е уравнение	
обе части равны…	$x_1y_1z_1$	$x_2y_2z_2$
1	011 101 111	001 (3) 011 (3) 100 (3)

		101 (3) 111 (3)
0	000 001 010 100 110	000 (5) 010 (5) 110 (5)

5) поэтому первое уравнение имеет 5·3 + 3·5 = 30 решений: 15 решений, при которых обе части равны 0, и 15 решений, при которых обе части равны 1
6) теперь подключаем второе уравнение: выпишем в следующий столбец все комбинации (x_2, y_2, z_2), при которых его левая часть равна 0, и в следующую строку – все комбинации (x_2, y_2, z_2), при которых его левая часть равна 1, указав соответствующее число решений первого уравнения:

	1-е уравнение		2-е уравнение	
обе части равны…	$x_1y_1z_1$	$x_2y_2z_2$	$x_2y_2z_2$	$x_3y_3z_3$
1	011 101 111	001 (3) 011 (3) 100 (3) 101 (3) 111 (3)	011 (3) 101 (3) 111 (3)	001 (9) 011 (9) 100 (9) 101 (9) 111 (9)
0	000 001 010 100 110	000 (5) 010 (5) 110 (5)	000 (5) 001 (3) 010 (5) 100 (3) 110 (5)	000 (21) 010 (21) 110 (21)

таким образом, на каждую комбинацию (x_3, y_3, z_3), при которых правая часть второго уравнения равна 1, приходится 3 + 3 + 3 = 9 допустимых троек (x_2, y_2, z_2), а на каждую комбинацию (x_3, y_3, z_3), при которых правая часть второго уравнения равна 0, приходится 5 + 3 + 5 + 3 + 5 = 21 допустимая тройка (x_2, y_2, z_2).

	1-е уравнение		2-е уравнение	
обе части равны…	$x_1y_1z_1$	$x_2y_2z_2$	$x_2y_2z_2$	$x_3y_3z_3$
1	011 101 111	001 (3) 011 (3) 100 (3) 101 (3) 111 (3)	011 (3) 101 (3) 111 (3)	
0	000 001 010 100 110	000 (5) 010 (5) 110 (5)	000 (5) 001 (3) 010 (5) 100 (3) 110 (5)	

7) несложно проверить, что 5 троек (x_3, y_3, z_3) дают 1 в правой части второго уравнения, а оставшиеся 3 тройки – 0:

	1-е уравнение		2-е уравнение	
обе части равны…	$x_1y_1z_1$	$x_2y_2z_2$	$x_2y_2z_2$	$x_3y_3z_3$
1	011 101 111	001 (3) 011 (3) 100 (3) 101 (3) 111 (3)	011 (3) 101 (3) 111 (3)	001 (9) 011 (9) 100 (9) 101 (9) 111 (9)
0	000 001 010 100 110	000 (5) 010 (5) 110 (5)	000 (5) 001 (3) 010 (5) 100 (3) 110 (5)	000 (21) 010 (21) 110 (21)

8) для получения ответа нужно сложить числа в скобках в последнем столбце таблицы:
   9 + 9 + 9 + 9 + 9 + 21 + 21 + 21 = 108

Ответ: 108.

Задача 4 (12 баллов). Функция S определена рекурсивно для неотрицательных целых чисел n и k следующим образом: S(0, 0) = 1; S(n, 0) = 0 для n > 0; S(n, k) = S(n-1, k-1) + (n-1)*S(n-1, k) для 0 < k < n. Очевидно, что S(n, n) = 1; S(n, k) = 0 при k > n. Вычислить вручную S(7, 4).

Решение.

Производим вычисления по формуле и результаты заносим в таблицу размером 8x8. В итоге будет получен следующий треугольник:

n	k							
	0	1	2	3	4	5	6	7
0	1							
1	0	1						
2	0	1	1					
3	0	2	3	1				
4	0	6	11	6	1			
5	0	24	50	35	10	1		
6	0	120	274	225	85	15	1	
7	0	720	1764	1624	735	175	21	1

Ответ: S(7, 4) = 735.

Задача 5 (10 баллов). Дана префиксная запись арифметического выражения: / * a + b – d + e f * + g h + i j. Найдите бинарное дерево, задающее это выражение, и вручную вычислите значение этого выражения для a=5, b=4, d=30, e=3, f=6, g=0, h=1, i=2, j=3.

Линейная форма представления бинарного дерева выражения будет иметь вид: ((a*(b+(d-(e+f))))/((g+h)*(i+j))).
Подставляя значения, получим ((5*(4+(30-(3+6))))/((0+1)*(2+3))) = 25.

Ответ: 25.

Задача 6 (8 баллов). Определите, что будет напечатано в результате выполнения следующей программы:

Pascal

```
var a: byte=11; b: byte=110;
begin
writeln(
byte(not(byte(b shl 1) and byte(b shr 1))) and
(byte((a or b) shr 1) or byte((a and b) shl 1)));
end.
```

C

```
typedef unsigned char byte;
int main() {
byte a=11, b=110;
printf( "%d\n",
(byte)(~((byte)(b << 1) & (byte)(b >> 1))) &
((byte)((a | b) >> 1) | (byte)((a & b) << 1)) );
return 0;
}
```

Ответ: 35.

Задача 7 (16 баллов). Изобразите вид матрицы **D** после выполнения следующей программы и выпишите элементы ее главной диагонали:

Pascal

```
const n=5;
var D: array[0..n-1,0..n-1] of integer;
var i, j, k, l: integer;
begin
k:=0; l:=0;
for i:=0 to n-1 do
for j:=0 to n-1 do
if ((i+j) mod 2 <> 0) then
begin k:=k+1; D[i,j]:=k; end
else begin l:=l-1; D[i,j]:=l; end;
for k:=0 to 1 do
for i:=0 to n-1 do
for j:=0 to n-1 do
D[i,j]:=min(D[i,j], D[i,k]+D[k,j]);
end.
```

C

```
#define MIN(X,Y) ((X) < (Y) ? (X) : (Y))
const int n=5;
int D[n][n];
int main() {
int i, j, k=0, l=0;
for (i=0; i<n; i++)
for (j=0; j<n; j++)
if ((i+j) % 2 != 0) D[i][j]=++k;
else D[i][j]=--l;
for (k=0; k<2; k++) {
for (i=0; i<n; i++)
for (j=0; j<n; j++)
D[i][j]=MIN(D[i][j], D[i][k]+D[k][j]);
return 0;
}
```

Решение.

Исходная матрица:

```
  1  -1   2  -2   3
 -3   4  -4   5  -5
  6  -6   7  -7   8
 -8   9  -9  10 -10
 11 -11  12 -12  13
```

Матрица для k=0:

```
  1  -1   2  -2   3
 -3  -4  -4  -5  -5
  6  -6   7  -7   8
 -8  -9  -9 -10 -10
 11 -11  12 -12  13
```

Матрица для k=1:

```
 -4  -5  -9 -10 -10
 -7  -8 -12 -13 -13
-13 -14 -26 -27 -27
-16 -17 -29 -30 -30
-18 -19 -31 -32 -32
```

Ответ: -4 -8 -26 -30 -32

Вариант 18 (условия, решения, ответы)

Задача 1 (8 баллов). Переведите десятичное число $A_{10} = 349,796875$ в шестнадцатеричную систему счисления.

Ответ: 15D,CC.

Задача 2 (8 баллов). Шесть мальчиков и шесть девочек идут на концерт вместе. Сколькими способами они могут занять места, если а) все девочки сядут вместе? б) две девочки сядут в середине? в) ни мальчики, ни девочки не будут сидеть все вместе?

Решение.

1) Пусть универсум **U** будет множеством всех размещений мальчиков и девочек. Следовательно, |**U**| = 12!.
2) Пусть D – множество всех размещений мальчиков и девочек, когда девочки будут сидеть вместе. Тогда |D| = 6!*7!.
3) Пусть M – множество всех размещений мальчиков и девочек, когда мальчики будут сидеть вместе. Тогда |M| = 6!*7!.
4) Двух девочек можно посадить в середине 6!/(6-2)! = 6!/4! = 6*5 = 30 способами. Количество размещений мальчиков и девочек, когда две девочки будут сидеть в середине равно 30*10!.
5) Количество размещений мальчиков и девочек, когда ни мальчики, ни девочки не будут сидеть все вместе, равно |**U**| - (|D| + |M| - |D ∩ M|) = 12! – (6!*7! + 6!*7! – 2*6!*6!).

Ответ: а) 6!*7!; б) 30*10!; в) 12! – (6!*7! + 6!*7! – 2*6!*6!).

Задача 3 (8 баллов). Сколько различных решений имеет система логических уравнений

$$\neg(x_1 \equiv x_2) \wedge \neg(x_1 \equiv x_3) \wedge (x_2 \equiv x_3) = 0$$
$$\neg(x_3 \equiv x_4) \wedge \neg(x_3 \equiv x_5) \wedge (x_4 \equiv x_5) = 0$$
$$\neg(x_5 \equiv x_6) \wedge \neg(x_5 \equiv x_7) \wedge (x_6 \equiv x_7) = 0$$
$$\neg(x_7 \equiv x_8) \wedge \neg(x_7 \equiv x_9) \wedge (x_8 \equiv x_9) = 0$$

где $x_1, x_2, \ldots, x_9$ – логические переменные? В ответе не нужно перечислять все различные наборы значений переменных, при которых выполнено данное равенство. В качестве ответа нужно указать количество таких наборов.

Решение.

1) заметим два важных момента:
   а) все 4 уравнения – однотипные
   б) первое связано со вторым только через переменную $\mathbf{x_3}$, второе с третьим – только через $\mathbf{x_5}$, третье с четвертым – только через $\mathbf{x_7}$
2) разберем подробно одно первое уравнение; поскольку в нем используется операция И (конъюнкция) и правая часть равна нулю (ложное значение), имеет смысл проверить ситуации, когда первое уравнение истинно: это будет тогда, когда $\mathbf{x_2 \equiv x_3}$, а $\mathbf{x_1}$ не равно этому значению, то есть в двух случаях: $(\mathbf{x_1,x_2,x_3})=(1,0,0)$ и $(\mathbf{x_1,x_2,x_3})=(0,1,1)$
3) поскольку логическое уравнение с тремя переменными может иметь не более $8 = 2^3$ решений, вычитаем два решения из этого количества и находим, что первое уравнение имеет 8 – 2 = 6 решений, причем в трёх из них $\mathbf{x_3} = 0$, а в трёх других $\mathbf{x_3} = 1$.
4) подключаем второе уравнение: для каждого из трёх решений первого при $\mathbf{x_3} = 0$ получаем три решения второго, и для каждого из трёх решений первого при $\mathbf{x_3} = 1$ получаем ещё три решения второго, всего система из двух уравнений имеет 3*3 + 3*3 = 18 решений
5) далее продолжаем таблицу:

число уравнений	решений
1	$3_{(\text{при } \mathbf{x3}=0)} + 3_{(\text{при } \mathbf{x3}=1)} = 6$
2	$3*3 + 3*3 = 9_{(\text{при } \mathbf{x5}=0)} + 9_{(\text{при } \mathbf{x5}=1)} = 18$
3	$9*3 + 9*3 = 27_{(\text{при } \mathbf{x7}=0)} + 27_{(\text{при } \mathbf{x7}=1)} = 54$
4	27*3 + 27*3 = 81 + 81 = 162

Ответ: 162.

Задача 4 (12 баллов). Функция S определена рекурсивно для неотрицательных целых чисел n и k следующим образом: S(0, 0) = 1; S(n, 0) = 0 для n > 0; S(n, k) = S(n-1, k-1) + k*S(n-1, k) для 0 < k < n. Очевидно, что S(n, 1) = 1 при n > 0; S(n, n) = 1; S(n, k) = 0 при k > n. Вычислить вручную S(7, 4).

Решение.

Производим вычисления по формуле и результаты заносим в таблицу размером 8x8. В итоге будет получен следующий треугольник:

n	k

	0	1	2	3	4	5	6	7
0	1							
1	0	1						
2	0	1	1					
3	0	1	3	1				
4	0	1	7	6	1			
5	0	1	15	25	10	1		
6	0	1	31	90	65	15	1	
7	0	1	63	301	350	140	21	1

Ответ: S(7, 4) = 350.

Задача 5 (10 баллов). Дана постфиксная (обратная польская) запись арифметического выражения: a b d e f + - + * g h + i j + * /. Найдите бинарное дерево, задающее это выражение, и вручную вычислите значение этого выражения для a=5, b=4, d=30, e=3, f=6, g=0, h=1, i=2, j=3.

Решение.

Линейная форма представления бинарного дерева выражения будет иметь вид: ((a*(b+(d-(e+f))))/((g+h)*(i+j))).
Подставляя значения, получим ((5*(4+(30-(3+6))))/((0+1)*(2+3))) = 25.

Ответ: 25.

Задача 6 (8 баллов). Определите, что будет напечатано в результате выполнения следующей программы:

Pascal

```
var a: byte=22; b: byte=220;
begin
writeln(
byte(not(byte(b shl 1) and byte(b shr 1))) and
(byte((a or b) shr 1) or byte((a and b) shl 1)));
end.
```

C

```
typedef unsigned char byte;
int main() {
byte a=22, b=220;
printf( "%d\n",
(byte)(~((byte)(b << 1) & (byte)(b >> 1))) &
((byte)((a | b) >> 1) | (byte)((a & b) << 1)) );
return 0;
}
```

Ответ: 71.

Задача 7 (16 баллов). Изобразите вид матрицы **D** после выполнения следующей программы и выпишите элементы ее побочной диагонали:

Pascal

```
const n=5;
var D: array[0..n-1,0..n-1] of integer;
var i, j, k, l: integer;
begin
k:=0; l:=0;
for i:=0 to n-1 do
for j:=0 to n-1 do
if ((i+j) mod 2 = 0) then
begin k:=k-1; D[i,j]:=k; end
else begin l:=l+1; D[i,j]:=l; end;
for k:=0 to 1 do
for i:=0 to n-1 do
for j:=0 to n-1 do
D[i,j]:=max(D[i,j], D[i,k]+D[k,j]);
end.
```

C

```
#define MAX(X,Y) ((X) > (Y) ? (X) : (Y))
const int n=5;
int D[n][n];
int main() {
int i, j, k=0, l=0;
for (i=0; i<n; i++)
for (j=0; j<n; j++)
if ((i+j) % 2 == 0) D[i][j]=--k;
else D[i][j]=++l;
for (k=0; k<2; k++)
for (i=0; i<n; i++)
for (j=0; j<n; j++)
D[i][j]=MAX(D[i][j], D[i][k]+D[k][j]);
return 0;
}
```

Побочной диагональю матрицы называется диагональ, идущая из левого нижнего угла в правый верхний угол.

Решение.

Исходная матрица:

```
  -1   1  -2   2  -3
   3  -4   4  -5   5
  -6   6  -7   7  -8
   8  -9   9 -10  10
 -11  11 -12  12 -13
```

Матрица для k=0:

-1	1	-2	2	-3
3	4	4	5	5
-6	6	-7	7	-8
8	9	9	10	10
-11	11	-12	12	-13

Матрица для k=1:

4	5	9	10	10
7	8	12	13	13
13	14	26	27	27
16	17	29	30	30
18	19	31	32	32

Ответ: 18 17 26 13 10