Задание 1.

Действительные числа x и y таковы, что $x(x+1)y = 6$, а $x^3(x^3+1)y^3 = 126$. Какие значения может принимать выражение $x^2(x^2+1)y^2$? Укажите все возможные ответы и докажите, что других нет.

Задание 2.

У Ярослава есть N замков, пронумерованных числами от 1 до N, расположенных по кругу в порядке увеличения номеров от 1 до N по часовой стрелке. В начальный момент времени все замки открыты. Ярослав начинает с замка с номером 1 и движется всегда по часовой стрелке. Если Ярослав находится у замка с номером k, то:
– если открытых замков сейчас суммарно больше k, то Ярослав закрывает следующие по часовой стрелке k открытых замков, и переходит к следующему после этого открытому замку (возможно, снова к замку с номером k);
– если открытых замков сейчас суммарно не больше k, то Ярослав закрывает все замки, кроме замка с номером k, и заканчивает (таким образом, остаётся открытым только замок с номером k).
При каком наименьшем $N > 2022$ Ярослав оставит в конце открытым замок с номером 1?

Задание 3.

Пусть O — центр описанной окружности, G — точка пересечения медиан остроугольного треугольника ABC. Прямая, перпендикулярная OG, проходящая через точку G, пересекает отрезок BC в точке K. Касательная к описанной окружности треугольника ABC в точке A пересекает прямую KG в точке L. Найдите величину угла $\angle ACB$, если $\angle LOK = 155°$, а $\angle ABC = 53°$.

Задание 4.

При каком наименьшем n все натуральные делители числа n можно поделить на три группы, суммы в которых равны? Если группа состоит из одного числа, то сумма чисел в этой группе равна этому одному числу.

Задание 5.

Пусть k — целое неотрицательное число, не превосходящее 1001. На доске написаны k единиц и $1001 - k$ нулей, т.е. всего на доске 1001 число. Саша и Марина играют в игру, делая ходы по очереди, начинает Саша. В свой ход Саша может заменить два каких-то числа на их произведение. Марина в свой ход может заменить два одинаковых числа на ноль, а два разных числа — на 1. Так они ходят до тех пор, пока на доске не останется ровно одно число. Если это единица — выигрывает Саша, если ноль — Марина. При каких k выигрывает Саша?