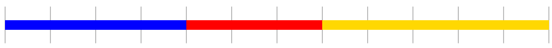
В скобках указано, каким классам рекомендуется задача (решать задачи более старших классов также разрешалось), а также, проверяется ли полное решение или достаточно было ввести ответ.

1 (6; ответ). Однажды в город пришел торговец с зонтиками трех цветов. Синих зонтиков у него было вдвое меньше, чем желтых и красных, красных — втрое меньше, чем желтых и синих, а желтых зонтиков 45. Сколько синих и сколько красных зонтиков было у торговца?

Ответ. 27 красных и 36 синих.

Решение. Синих зонтиков вдвое меньше, чем желтых и красных. Это означает, что синие зонтики составляют треть от всех. Аналогично красные зонтики составляют четверть от всех. Нарисуем отрезок, изображающий все зонтики. Чтобы на нем удобно изображались и треть, и четверть от всего отрезка, сделаем его длиной 12 клеток.



Синим зонтикам соответствует отрезок в 4 клетки, красным — в 3 клетки, а на долю желтых останется $12-3-4=5$ клеток. Если 45 зонтиков изображаются как 5 клеток, то каждая клетка — это 9 зонтиков. Тогда синих зонтиков $4\cdot 9=36$, а красных — $3\cdot 9=27$.

2 (6–7; ответ). Вставьте вместо каждой звездочки цифру так, чтобы произведение трех десятичных дробей равнялось натуральному числу. Использовать ноль нельзя, зато остальные цифры могут повторяться.

$$*{,}*\cdot *{,}*\cdot *{,}* = *$$

Ответ. $1{,}5\cdot 1{,}6\cdot 2{,}5=6$ или $1{,}5\cdot 2{,}4\cdot 2{,}5=9$ (каждый из этих варинтов на самом деле задает шесть ответов, поскольку от порядка множителей произведение не зависит).

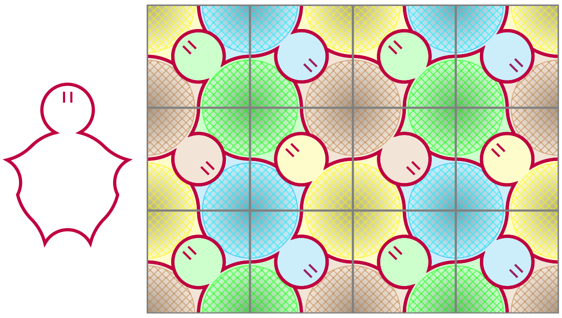
Комментарий. От участников требовалось найти лишь один пример. Покажем, как найти их все.

Домножим каждое из чисел в левой части на 10, а правую часть, соответственно, на 1000. Если $*{,}*$ домножить на 10, то получится $**$. Поскольку ни одна из звездочек не должна равняться нулю, каждое такое число — двузначное и не делится на 10.

Значит, надо число вида $*000=*\cdot 2^3\cdot 5^3$ представить в виде произведения трех двузначных чисел, не кратных 10. Если число не делится на 10, то в его разложение одновременно и 2, и 5 входить не могут; $5^3=125$ уже трехзначное число, значит, в разложение одного из чисел в левой части должны войти ровно две 5, в одно — одна 5, а в оставшееся — 2^3.

Итак, в один из множителей из левой части входит 25, в другой — 8, в третий — 5; числа должны быть двузначные. Значит, у цифры $*$ должно быть как минимум два простых делителя: на один мы должны домножить 8, на другой — 5; кроме того, 5 нельзя домножить на 2, т.е. в разложении $*$ должна быть не 2. Итого для $*$ остаются всего два варианта: $6=2\cdot 3$ и $9=3\cdot 3$, которые и дают нам оба примера.

3 (6–8; ответ). Если из квадратных плиток, которые отличаются только расцветкой, сложить прямоугольник 3×4, как на рисунке, то целиком в нем поместится 6 черепашек. А сколько черепашек поместится целиком в составленном таким же образом прямоугольнике 20×21?



Ответ. 380.

Решение. Заметим, что черепашка тогда и только тогда помещается в прямоугольнике целиком, когда центр ее панциря лежит в узле сетки, который лежит на границе четырех плиток. Таких узлов в прямоугольнике 20×21 будет $19 \times 20 = 380$.

4 (6–9; ответ). Петя написал стозначное число X, в записи которого нет нулей. Пятидесятизначное число, образованное первыми пятьюдесятью цифрами числа X, Петя назвал *головой числа* X. Оказалось, что число X без остатка делится на свою голову. Сколько нулей в записи частного?

Ответ. 49.

Решение. Припишем к голове числа X справа 50 нулей и вычтем полученное число из X. В результате останется «хвост» числа X, то есть число, образованное последними 50 цифрами числа X. Как разность чисел, делящихся нацело на голову, хвост числа X также на нее делится, причем частное не может быть двузначным: иначе бы в хвосте было больше цифр, чем в голове, а их поровну. Нулем это частное тоже быть не может, поскольку в записи X нет нулей. Значит, частное от деления X на голову состоит из единицы, 49 нулей и однозначного (ненулевого) частного от деления хвоста на голову числа X.

5 (7–11; решение). У золотоискателя есть куча золотого песка массой 37 кг (и больше песка у него нет), двухчашечные весы и две гири 1 и 2 кг. Золотоискатель умеет делать действия двух типов:

- *уравнивать весы*, т.е. если сейчас весы не в равновесии, то он может пересыпать часть песка с одной чаши на другую так, чтобы весы встали в равновесие;
- *досыпать до равновесия*, т.е. если сейчас весы не в равновесии, то он может добавить песка на одну из чаш так, чтобы весы встали в равновесие.

Конечно, каждое из этих действий он может сделать только если для этого у него хватает песка.

Как ему за два действия с весами получить кучку, в которой ровно 26 кг песка? Смешать две кучки песка, а также просто ставить что-то на весы действием не считается.

Решение. Первым действием золотоискатель может поставить на левую чашу весов весь песок, а на правую обе гири — и пересыпать песок до достижения равновесия. В итоге он получит 20 кг песка слева и 17 кг песка (и две гири $1+2$ кг) справа. Вторым действием следует на левую чашу весов поставить 20 кг песка, а на правую гирю в 2 кг — и вновь уравнивать весы, пока слева не окажется 11 кг, а справа 9 кг песка (и одна гиря весом 2 кг). Наконец, следует смешать полученную вторым действием кучу весом 9 кг и оставшуюся от первого действия кучу весом в 17 кг.

6 (8–11; ответ). Несократимая дробь $\frac{a}{b}$ такова, что

$$\frac{a}{b}=\frac{999}{1999}+\frac{999}{1999}\cdot\frac{998}{1998}+\frac{999}{1999}\cdot\frac{998}{1998}\cdot\frac{997}{1997}+\ldots+\frac{999}{1999}\cdot\frac{998}{1998}\cdot\ldots\cdot\frac{1}{1001}.$$

Найдите a и b.

Ответ. $a=999$, $b=1001$.

Решение. Заметим, что в каждом слагаемом есть дробь $\frac{999}{1999}$. Вынесем ее за скобку:

$$\frac{a}{b}=\frac{999}{1999}\left(1+\frac{998}{1998}+\frac{998}{1998}\cdot\frac{997}{1997}+\ldots+\frac{998}{1998}\cdot\ldots\cdot\frac{1}{1001}\right).$$

В каждом слагаемом в скобках, кроме 1, оставшейся от $\frac{999}{1999}$, будет дробь $\frac{998}{1998}$, которую тоже можно вынести за скобку:

$$\frac{a}{b}=\frac{999}{1999}\left(1+\frac{998}{1998}\left(1+\frac{997}{1997}\cdot\frac{996}{1996}+\ldots+\frac{997}{1997}\cdot\ldots\cdot\frac{1}{1001}\right)\right).$$

А в скобках вновь в каждом слагаемом, кроме 1, оставшейся от $\frac{998}{1998}$, будет дробь $\frac{997}{1997}$, которую можно вынести за скобку. Такой процесс можно продолжать до тех пор, пока внутри скобок не останется сумма $1+\frac{1}{1001}$:

$$\frac{a}{b}=\frac{999}{1999}\left(1+\frac{998}{1998}\left(\ldots\left(1+\frac{3}{1003}\left(1+\frac{2}{1002}\left(1+\frac{1}{1001}\right)\right)\right)\ldots\right)\right).$$

Теперь будем последовательно вычислять значение этого выражения изнутри наружу. Начнем с вычисления выражения в самых внутренних скобках:

$$\left(1+\frac{2}{1002}\left(1+\frac{1}{1001}\right)\right)=\left(1+\frac{2}{1002}\cdot\frac{1002}{1001}\right)=\left(1+\frac{2}{1001}\right).$$

Дальше это процедуру можно повторить:

$$\left(1+\frac{3}{1003}\left(1+\frac{2}{1001}\right)\right)=\left(1+\frac{3}{1003}\cdot\frac{1003}{1001}\right)=\left(1+\frac{3}{1001}\right).$$

Теперь мы можем высказать предположение и проверить его: на каждом шаге у нас будет получаться дробь вида $\frac{k}{1001}$. Действительно, если уже получилась дробь $\frac{k-1}{1001}$, то на следующем шаге и правда получится $\frac{k}{1001}$:

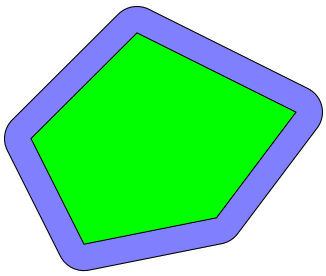
$$\frac{a}{b}=\frac{999}{1999}\left(1+\frac{998}{1998}\left(\ldots\left(1+\frac{k}{1000+k}\left(1+\frac{k-1}{1001}\right)\right)\ldots\right)\right)=$$

$$= \frac{999}{1999}\left(1+\frac{998}{1998}\left(\ldots\left(1+\frac{k}{1000+k}\cdot\frac{1000+k}{1001}\right)\ldots\right)\right)=$$
$$= \frac{999}{1999}\left(1+\frac{998}{1998}\left(\ldots\left(1+\frac{k}{1001}\right)\ldots\right)\right).$$

Продолжая таким образом, мы придем к ответу:

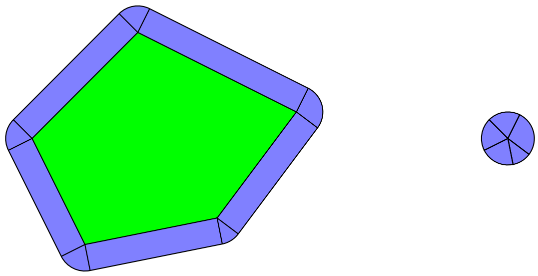
$$\frac{a}{b}=\ldots=\frac{999}{1999}\left(1+\frac{998}{1998}\left(1+\frac{997}{1001}\right)\right)=\frac{999}{1999}\left(1+\frac{998}{1001}\right)=\frac{999}{1001}.$$

7 (9–10; ответ). Никита нарисовал и закрасил выпуклый пятиугольник с периметром 20 и площадью 21. Таня закрасила все точки, находящиеся на расстоянии не более 1 от закрашенных Никитой (см. рис.). На сколько увеличилась закрашенная площадь? Ответ округлите до сотых.



Ответ. 23,14.

Решение. Разобьем добавленную Таней площадь на пять прямоугольников ширины 1, у каждого из которых одна из сторон совпадает со стороной исходного пятиугольника, и на сектора кругов радиуса 1 с вершинами в вершинах пятиугольника (см. рис).



Добавленная площадь равна сумме площадей прямоугольников и площадей секторов. Сумма площадей прямоугольников равна произведению ширины (равной 1) на сумму длин сторон пятиугольника: $1\cdot 20$. Сектора же складываются в один полный круг, площадь которого равна $\pi\cdot 1^2$. То есть добавленная площадь составляет $20+\pi\approx 23{,}14$.

Комментарий. Объяснить, почему сектора действительно складываются в полный круг, можно следующим образом. У двух соседних секторов два ограничивающих радиуса являются противоположными сторонами прямоугольника. Значит, если «схлопнуть» прямоугольник, сторонами которого они являются, то два соседних сектора объединятся в один сектор. Сделав так с каждой парой, мы получим целый круг.

Приведенное рассуждение справедливо для любого выпуклого многоугольника. Угол сектора равен соответствующему внешнему углу многоугольника, так что по сути мы доказали, что сумма внешних углов выпуклого многоугольника равна 360° (см. по этому поводу также `https://etudes.ru/models/exterior-angles-sum/`).

Аналогичная формула для площади «окрестности» верна для произвольных ограниченных выпуклых фигур. Об этой *теореме Штейнера* можно прочитать в статье Л. В. Локуциевского и В. М. Тихомирова «Выпуклый анализ на плоскости» (журнал «Квант», 2018 г., №№5–6).

8 (10–11; ответ). Найдите трехзначное число, которое представимо в виде суммы и двух, и трех, и четырех, и пяти, и шести квадратов различных натуральных чисел. Достаточно привести один пример.

Ответ. Например, подойдет

$$\begin{aligned} 845 &= 3^2+4^2+12^2+6^2+8^2+24^2 = 5^2+12^2+6^2+8^2+24^2 = \\ &= 13^2+6^2+8^2+24^2 = 13^2+10^2+24^2 = 13^2+26^2. \end{aligned}$$

Комментарии. 1) Объясним, как можно найти этот пример. Когда свобода выбора слишком велика, бывает полезно наложить дополнительное условие. Будем искать пример, в котором пример на k квадратов получается из примера на $k+1$ квадрат заменой суммы двух квадратов на другой квадрат. В этом нам помогут *пифагоровы тройки.*

Одна из них хорошо известна: $3^2+4^2=5^2$. Т.е. если у нас в представлении числа есть 3^2+4^2, то мы можем заменить эту сумму на 5^2 и количество квадратов в представлении уменьшится на один. Заметим, что есть еще пифагорова тройка, содержащая 5: это 5, 12, 13. Т.е. $3^2+4^2+12^2$ можно вначале поменять на 5^2+12^2, а потом на 13^2.

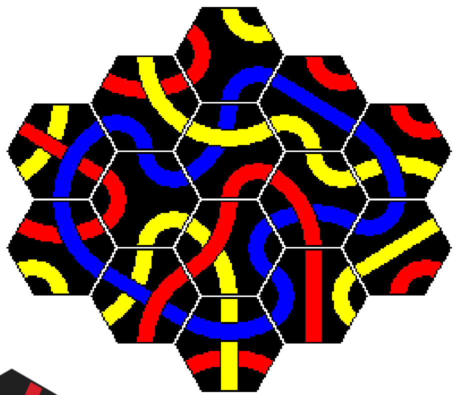
Можно было бы продолжать похожий процесс: есть пифагорова тройка, в которую входит 13: $13^2+84^2=85^2$. Однако 84^2 это уже четырехзначное число. Вместо этого домножим уже имеющийся у нас пример на 2^2: $6^2+8^2+24^2=10^2+24^2=26^2$. Теперь понятно, что нам подходит число $(3^2+4^2+12^2)+(6^2+8^2+24^2)=845$.

2) О пифагоровых тройках и о том, как они устроены, можно почитать в статье С. Воронина и А. Кулагина «О задаче Пифагора» (журнал «Квант», 1987 г., № 1; `http://kvant.mccme.ru/1987/01/o_zadache_pifagora.htm`).

3) Полный список подходящих чисел (найденный с использованием компьютера): 146, 169, 170, 178, 180, 181, 194, 200, 202, 218, 226, 229, 234, 241, 244, 250, 257, 260, 265, 269, 274, 277, 281, 289, 290, 293, 296, 298, 305, 306, 313, 314, 317, 325, 337, 338, 346, 349, 353, 356, 360, 362, 365, 369, 370, 373, 377, 386, 389, 394, 397, 401, 404, 405, 409, 410, 421, 424, 425, 433, 436, 442, 445, 449, 450, 452, 457, 458, 461, 464, 466, 468, 477, 481, 482, 485, 488, 490, 493, 500, 505, 509, 514, 521, 522, 530, 533, 538, 541, 545, 548, 549, 554, 557, 562, 565, 569, 577, 578, 580, 584, 585, 586, 593, 596, 601, 605, 610, 612, 613, 617, 625, 626, 628, 629, 634, 637, 641, 650, 653, 656, 657, 661, 666, 673, 674, 676, 677, 680, 685, 689, 692, 698, 701, 706, 709, 712, 720, 724, 725, 730, 733, 738, 740, 745, 746, 754, 757, 761, 765, 769, 773, 776, 778, 785, 788, 793, 794, 797, 800, 801, 802, 808, 809, 810, 818, 820, 821, 829, 833, 841, 842, 845, 848, 850, 853, 857, 865, 866, 872, 873, 877, 881, 884, 890, 898, 900, 901, 904, 905, 909, 914, 916, 922, 925, 929, 932, 936, 937, 941, 949, 953, 954, 962, 964, 965, 970, 976, 977, 980, 981, 985, 986, 997.

9 (10–11; решение). В игре Тантрикс-солитер возможны фишки 14 типов:

Каждую из них можно поворачивать, но нельзя переворачивать: именно поэтому первые 2 фишки разные — их нельзя получить друг из друга поворотом. Их разрешается прикладывать друг к другу так, чтобы линии одного цвета были продолжениями друг друга. У Саши было по одной фишке каждого типа, и он мог выложить их так, чтобы все синие линии образовывали «петлю», и при этом чтобы в картинке не было «дырок»:



Саша потерял фишку . Докажите, что теперь он не сможет выложить оставшиеся 13 фишек так, чтобы в картинке не было «дырок», а все синие линии образовывали петлю.

Решение. Предположим, Саша выложил 13 фишек так, что все синие линии образуют петлю, а дырок внутри нет. Тогда красная кривая не может оборваться внутри петли, а значит каждому «входу» красной кривой внутрь синей петли можно сопоставить единственный следующий за ним «выход» из нее. Таким образом, общее количество пересечений всех красных кривых с синей петлей четно. С другой стороны, на оставшихся 13 фишках таких пересечений нечетное число (а именно: 3). Противоречие; следовательно, Саша не может выложить фишки указанным образом.

10 (11; ответ). Сфера единичного радиуса касается всех ребер некоторой треугольной призмы. Чему может быть равен объем этой призмы? Ответ округлите до сотых.

Ответ. $9/4 = 2{,}25$.

Решение. Сфера пересекает основание призмы по окружности, которая касается всех ребер основания, т.е. по вписанной окружности треугольника. Следовательно, центр сферы лежит на перпендикуляре к основанию, проходящем через центр этой окружности как для верхнего, так и для нижнего основания. Но эти перпендикуляры параллельны! Значит (раз центр сферы лежит на них обоих), эти перпендикуляры совпадают. А призма прямая, так как при ортогональной проекции центр вписанной окружности одного основания переходит в соответствующий центр другого.

Раз призма прямая, ее боковые грани прямоугольники. В каждый из них можно вписать окружность — значит, это квадраты. Поэтому все ребра призмы равны, а ее основания — правильные треугольники.

Радиус описанной окружности основания равен 1, так как при ортогональной проекции на плоскость основания наша сфера переходит в окружность, содержащую все вершины треугольника — т.е. в его описанную окружность. Тогда сторона основания равна $\sqrt{3}$ (и такую же длину имеет боковое ребро), а площадь основания $\frac{3\sqrt{3}}{4}$. Значит, объем призмы равен $\sqrt{3} \cdot \frac{3\sqrt{3}}{4} = \frac{9}{4}$.

Вариант подготовили: А. В. Антропов, Е. В. Бакаев, И. Р. Высоцкий, М. А. Евдокимов, Т. В. Казицына, Т. А. Корчемкина, Н. Ю. Медведь, Г. А. Мерзон, И. В. Раскина, И. Я. Сиротовский, Н. А. Солодовников, Б. Р. Френкин, А. В. Шаповалов.

Задания, решения, результаты публикуются на сайте `http://turlom.olimpiada.ru`