

Математика. 9 класс

1 вариант

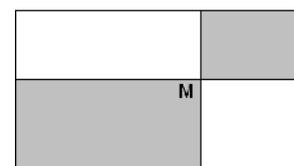
Работа рассчитана на 240 минут.

Максимальная оценка за каждую задачу – 20 баллов.

Все решения должны быть полными и обоснованными.

1. Найдите все целые a , при которых модуль числа $|a^2 - 3a - 6|$ равен простому числу.

2. Внутри прямоугольника выбрана точка M и через неё проведены прямые, параллельные сторонам прямоугольника. Оказалось, что площади серых прямоугольников равны (см. рисунок). Найдите геометрическое место точек M .



3. Алиса написала несколько положительных целых чисел. Саша переписал эти числа и добавил одно целое число, меньше всех чисел Алисы. Каждый из них нашёл сумму и произведение своих чисел и поделил сумму на произведение. У Саши получилось число в 5 раз меньше, чем у Алисы. Какое число он мог добавить?

4. В трапеции $ABCD$ основания AD и BC относятся как $AD:BC = 3:2$, боковая сторона AB перпендикулярна основаниям. На стороне AB выбрана точка K так, что $KA:AB = 3:5$. Из точки K проведён перпендикуляр к CD , пересекающий отрезок CD в точке P . Докажите, что $\angle KPA = \angle KPB$.

5. Натуральные числа, кратные 3, покрасили в два цвета: красный и синий, так, что сумма синего и красного числа – красная, а произведение синего и красного числа – синее. Сколькими способами можно раскрасить числа, чтобы число 546 было синим?

Математика. 9 класс

2 вариант

Работа рассчитана на 240 минут.

Максимальная оценка за каждую задачу – 20 баллов.

Все решения должны быть полными и обоснованными.

1. Сумма двух чисел равна 2022. Если у первого числа стереть последнюю цифру 5, а ко второму числу справа приписать цифру 1, то сумма изменённых чисел станет равна 2252. Найдите исходные числа.
2. Периметр треугольника равен 4. Докажите, что сумма квадратов длин сторон больше 5.
3. Два бельчонка находятся в точках A и B , и начинают одновременно скакать по прямым AO и BO по направлению к точке O (пройдя точку O , каждый продолжает движение по своей прямой). Расстояние $AO = 120$ метров, $BO = 80$ метров, угол $AOB = 60^\circ$. У бельчат постоянная одинаковая скорость. Каково наименьшее расстояние между бельчатами во время движения?
4. Найдите наименьшее натуральное $n > 1$, для которого сумма никаких двух натуральных степеней не является точным квадратом натурального числа.
5. Можно ли отметить на клетчатой бумаге 5 точек пересечения линий сетки так, чтобы эти точки были вершинами равностороннего пятиугольника?

Математика. 9 класс

3 вариант

Работа рассчитана на 240 минут.

Максимальная оценка за каждую задачу – 20 баллов.

Все решения должны быть полными и обоснованными.

1. Сколько существует правильных несократимых дробей, у которых сумма числителя и знаменателя равна 100?
2. У двоих бельчат было одинаковое количество сосновых шишек и одинаковое количество кедровых шишек. Всего шишек у каждого бельчонка было меньше 25. Первый бельчонок набрал ещё столько же сосновых шишек, сколько у него было, и 26 кедровых шишек. У него оказалось больше сосновых, чем кедровых. Второй бельчонок набрал ещё столько же кедровых шишек, сколько у него было, а 4 сосновые съел. У него оказалось больше кедровых, чем сосновых. Сколько сосновых и кедровых шишек было у каждого бельчонка изначально?
3. Сумма m последовательных натуральных чисел равна простому числу p . Чему может равняться m ?
4. В прямоугольнике $ABCD$ сторона $BC = 3$. На середине стороны AB отмечена точка P . Из точки C опущен перпендикуляр CQ на DP . Найдите длину BQ .
5. Таблица 7×7 заполняется целыми ненулевыми числами. Сначала по рамке таблицы расставляются отрицательные числа. Дальше клетки заполняются в произвольном порядке, и очередное число равно произведению поставленных ранее чисел, ближайших к нему по строке или ближайших к нему по столбцу. Какое наибольшее количество положительных чисел может быть в таблице?

Математика. 9 класс

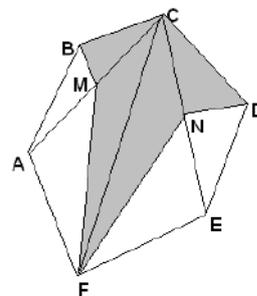
4 вариант

Работа рассчитана на 240 минут.

Максимальная оценка за каждую задачу – 20 баллов.

Все решения должны быть полными и обоснованными.

1. В выпуклом шестиугольнике $ABCDEF$ точка M – середина отрезка AC , точка N – середина отрезка CE . Докажите, что площадь закрашенной фигуры равна половине площади шестиугольника $ABCDEF$.



2. Девять бельчат соревновались в беге на 50 метров, у всех были разные результаты. Потом их разбили на три группы по 3 бельчонка. Первая и вторая группы соревновались между собой по таким правилам: какой-нибудь бельчонок из первой группы бежал с каким-нибудь бельчонком из второй группы. Потом другой бельчонок из первой группы бежал с другим бельчонком из второй группы. И наконец, соревновались оставшиеся бельчата из первой и второй групп. У какой группы больше побед из трёх забегов, та и выиграла. Затем так же соревновались вторая и третья группы, потом первая и третья. Все бельчата бежали с той же скоростью, как в начале, когда соревновались все вместе. Могло ли быть так, что первая группа выиграла у второй, вторая у третьей, третья у первой? Если нет – докажите; если да – покажите, как это могло быть.

3. На доске были записаны два неравенства, каждое из которых выполняется для некоторых чисел $a \geq b \geq c \geq 0$.

$$(1) a^2 + b^2 + c^2 \leq 2(ab + bc + ac),$$

$$(2) a^4 + b^4 + c^4 \leq 2(a^2b^2 + b^2c^2 + a^2c^2).$$

Настя считает, что неравенства (1) и (2) равносильны, Петя – что из (1) следует (2), Нина – что из (2) следует (1), Даня – что они все не правы. Чьи высказывания истинны?

4. Окружность, проходящая через вершины L и M трапеции $KLMN$, пересекает боковые стороны KL и MN в точках P и Q соответственно и касается основания KN в точке S . Оказалось, что $\angle LSM = 50^\circ$, а $\angle KLS = \angle SNM$. Найдите $\angle PSQ$.

5. Бельчонок собрал в лесу 15 орехов весом 50, 51, ..., 64 граммов. Ему известен вес каждого из орехов. С помощью чашечных весов бельчонок пытается доказать своим друзьям, что первый орех весит 50 г., второй – 51 г., третий – 52 г. и т.д. (вначале друзья ничего не знают про веса орехов). Какое наименьшее количество гирь потребуется бельчонку, если и гири, и орехи можно размещать на обеих чашах весов, а количество взвешиваний неограниченно? (Весы гирь известны как бельчонку, так и друзьям. В наличии неограниченный запас гирь весом 1, 2, ..., 1000 г.)