Математика. 8 класс

1 вариант

Работа рассчитана на 240 минут.
Максимальная оценка за каждую задачу – 20 баллов.
Все решения должны быть полными и обоснованными.

1. Существует ли прямоугольный параллелепипед, все стороны которого выражаются целыми числами, а объем численно равен его площади поверхности?

2. Оба корня квадратного трехчлена $x^2 + px + q$ увеличили на 3, после чего получились корни трехчлена $x^2 - 2px - q$. Найдите p и q.

3. Серединные перпендикуляры к диагоналям LN и KM выпуклого четырехугольника $KLMN$ пересекают сторону KN в точках P и Q соответственно (P лежит между K и Q). Оказалось, что $LP \parallel MQ$. Докажите, что $LN \perp KM$.

4. Числа $1, 2, 3, \ldots, 9, 10$ записали в ряд в произвольном порядке, и посчитали следующие суммы: первая сумма S_1 равняется первому числу, вторая сумма S_2 равняется сумме первого и второго чисел, S_3 равняется сумме первого, второго и третьего чисел, и т.д. Последняя сумма S_{10} равняется сумме всех чисел. Какое наибольшее возможное количество простых чисел может оказаться среди сумм $S_1, S_2, \ldots, S_{10}$?

5. Шесть команд провели турнир – каждая команда сыграла с каждой по разу. За ничью начислялось 1 очко, за проигрыш очков не давалось. Шесть команд набрали соответственно 12, 10, 9, 8, 7 и 6 очков. Сколько очков (не обязательно целое число) начислялось за победу?

Математика. 8 класс

2 вариант

Работа рассчитана на 240 минут.
Максимальная оценка за каждую задачу – 20 баллов.
Все решения должны быть полными и обоснованными.

1. Существует ли прямоугольный параллелепипед, все стороны которого выражаются целыми числами, а площадь его поверхности численно равна сумме длин всех его рёбер?

2. Квадратный трехчлен $x^2 + 3px + p$ имеет корни u и v, а квадратный трехчлен $x^2 - 4qx + q$ имеет корни $\frac{1}{u}$ и $\frac{1}{v}$. Найдите p и q.

3. Серединные перпендикуляры к диагоналям KM и LN выпуклого четырехугольника $KLMN$ пересекают прямую LM в точках P и Q соответственно (P лежит на продолжении отрезка LM за точку L, а Q – за точку M). Оказалось, что $KP \parallel NQ$. Докажите, что $LN \perp KM$.

4. Сумма двух целых чисел равна 100, и сумма двух других целых чисел тоже равна 100. Числа в первой паре перемножили и сложили с произведением чисел во второй паре. Могла ли сумма этих двух произведений равняться 1001?

5. Шесть команд провели турнир – каждая команда сыграла с каждой по разу. За ничью начислялось 1 очко, за проигрыш очков не давалось. Шесть команд набрали соответственно $10,\ 7,\ 6,\ 6,\ 3$ и 3 очков. Сколько очков (не обязательно целое число) начислялось за победу?

Математика. 8 класс

3 вариант

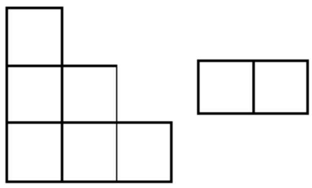
Работа рассчитана на 240 минут.
Максимальная оценка за каждую задачу – 20 баллов.
Все решения должны быть полными и обоснованными.

1. Существует ли прямоугольный треугольник, гипотенуза которого численно равна половине его площади?

2. Квадратный трехчлен px^2+qx+r имеет два корня. Докажите, что трехчлен $3px^2+2(p+q)x+(q+r)$ также имеет два корня.

3. Известно, что в трапеции $KLMN$ боковая сторона KL равна основанию LM. Точки P и Q – середины оснований KN и LM соответственно, причем точка P лежит на биссектрисе угла L. Докажите, что $LN=2PQ$.

4. Квадрат размером 100×100 клеток разбит на фигурки двух типов, изображённые на рисунке. Может ли оказаться, что фигурок из шести клеток ровно 333? Фигурки можно поворачивать и переворачивать.



5. Несколько команд провели турнир по гандболу – каждая команда сыграла с каждой по разу. За победу начислялось 2 очка, за ничью – 1 очко, за проигрыш очков не давалось. Если по итогам две команды набрали одинаковое число очков, более высокое место присуждалось команде, у которой больше разница между числом забитых и пропущенных мячей. Три команды, ставшие призёрами, набрали соответственно 7 , 5 и 3 очков. Сколько очков набрала последняя команда?

Математика. 8 класс

4 вариант

Работа рассчитана на 240 минут.
Максимальная оценка за каждую задачу – 20 баллов.
Все решения должны быть полными и обоснованными.

1. На доске нарисован прямоугольник. Известно, что если его ширину увеличить на 30%, а длину уменьшить на 20%, то его периметр останется неизменным. Как изменился бы периметр исходного прямоугольника, если его ширину уменьшили бы на 20%, а длину увеличили бы на 30%?

2. Квадратный трехчлен x^2+ux-v имеет различные ненулевые корни p и q, а квадратный трехчлен x^2+px-q – различные ненулевые корни u и v. Найдите всевозможные значения p, q, u и v.

3. В трапеции $KLMN$ основание LM в два раза короче KN. Внутри трапеции отмечена такая точка O, что $KL=OL$. Докажите, что прямая, соединяющая точку M с серединой отрезка ON, перпендикулярна OK.

4. Миша в течение недели каждый день срывал по яблоку и взвешивал его. Все яблоки весили по-разному, но вес каждого яблока был равен целому числу граммов и колебался от 221 грамма до 230 граммов (включительно). Миша также вычислял средний вес всех сорванных яблок, и он каждый раз был целым числом граммов. Яблоко, сорванное в седьмой день, весило 225 граммов. Сколько весило яблоко, сорванное в шестой день?

5. Несколько команд провели турнир по хоккею – каждая команда сыграла с каждой по разу. За победу начислялось 2 очка, за ничью – 1 очко, за проигрыш очков не давалось. Команда «Бельчата» одержала больше всех побед и набрала меньше всех очков. Какое наименьшее количество команд могло принимать участие в турнире?