Математика. 11 класс

1 вариант

Работа рассчитана на 240 минут.
Максимальная оценка за каждую задачу – 20 баллов.
Все решения должны быть полными и обоснованными.

1. Борис раскладывает 8 белых и 8 чёрных шариков по двум коробкам. Настя наугад выбирает коробку, а потом не глядя берёт из неё шарик. Может ли Борис так разложить шарики по двум коробкам, чтобы вероятность вынуть белый шарик была больше $\frac{2}{3}$?

2. На продолжении за точку C стороны BC равностороннего треугольника ABC выбрана точка M, через неё проведена прямая, параллельная AC. Эта прямая пересекает продолжение стороны AB в точке N. Медианы треугольника BNM пересекаются в точке O. Точка D – середина AM. Найдите углы треугольника ODC.

3. На отрезке $[2; 5]$ выбрали три разные точки, для каждой точки перемножили расстояния до двух других точек, получили положительные числа a, b, c. Докажите, что $\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c} \geq \frac{8}{9}$.

4. Найдите все натуральные числа a, для которых число
$$\frac{a + 1 + \sqrt{a^5 + 2a^2 + 1}}{a^2 + 1}$$
также является натуральным.

5. Найдите целую часть числа
$$\frac{1}{\sqrt{1}+\sqrt{2}}+\frac{1}{\sqrt{3}+\sqrt{4}}+\cdots+\frac{1}{\sqrt{623}+\sqrt{624}}.$$

Математика. 11 класс

2 вариант

Работа рассчитана на 240 минут.
Максимальная оценка за каждую задачу – 20 баллов.
Все решения должны быть полными и обоснованными.

1. Для отбора на соревнования борец Владимир должен был провести три схватки и одержать подряд хотя бы две победы. Его соперниками были Андрей (А) и Борис (Б). Владимир мог выбрать схему встреч: АБА или БАБ. Вероятность Владимира потерпеть поражение в одной схватке от Бориса равна 0,3, а от Андрея 0,4; вероятности постоянны. При какой схеме вероятность отобраться на соревнования больше, и чему равна эта вероятность?

2. Найдите для всех натуральных $n > 1$ положительные решения системы

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + \cdots + nx_n = 3, \\ \dfrac{1}{x_1} + \dfrac{1}{2x_2} + \cdots + \dfrac{1}{nx_n} = 3. \end{cases}$$

3. Докажите, что $\cos\frac{\pi}{7} + \cos\frac{3\pi}{7} + \cos\frac{5\pi}{7} = \frac{1}{2}$.

4. Коля и Влад начертили одинаковые выпуклые четырёхугольники $ABCD$. На стороне AB каждый из них выбрал точку E, на стороне CD каждый выбрал точку F. Коля выбрал точки на серединах сторон, а Влад – на расстоянии $\frac{1}{3}$ длины стороны AB от A и на расстоянии $\frac{1}{3}$ длины стороны CD от C. Потом каждый из них отметил середины отрезков AF, DE, BF, CE, получил соответственно точки K, L, M, N, и соединил их в указанном порядке. У каждого получился четырехугольник $KLMN$. Коля считает, что площадь его четырёхугольника больше. Прав ли он?

5. Трое бельчат на завтрак обычно едят кашу: манную (М), пшённую (П), овсяную (О), гречневую (Г). Ни одна каша не нравится всем троим бельчатам, но для каждой пары бельчат есть хотя бы одна каша, которая нравится им обоим. Сколько можно составить разных таблиц, в которых в каждой клетке стоит плюс (если нравится) или минус (если не нравится)?

	М	П	О	Г
Бельчонок 1				
Бельчонок 2				
Бельчонок 3				

Математика. 11 класс
3 вариант

Работа рассчитана на 240 минут.
Максимальная оценка за каждую задачу – 20 баллов.
Все решения должны быть полными и обоснованными.

1. Сугроб высотой 468 см за первый час уменьшился на 6 см по высоте, за второй час – на 12 см по высоте, ..., за k -й час – на $6k$ см по высоте. За некоторое время T сугроб растаял полностью. Какая часть сугроба по высоте растаяла за время $\frac{T}{2}$?

2. На границе круглой поляны по часовой стрелке отмечены точки A, B, C, D. В точке A находится бельчонок Ан, в точке B – бельчонок Бим, в точке C стоит сосна, в точке D – дуб. Бельчата одновременно начали бежать, Ан к сосне, Бим к дубу. Они столкнулись в точке M, которая находится ближе к сосне, чем к дубу. Верно ли, что если бы Ан побежал из точки A к дубу, а Бим из точки B к сосне, Ан прибежал бы первым? Каждый бельчонок бежит по прямой и со своей постоянной скоростью.

3. Каким числом способов можно разложить 30 яблок в 3 корзинки так, чтобы в первой корзинке лежало меньше яблок, чем во второй, во второй меньше, чем в третьей, и пустых корзинок не было?

4. В выпуклом семиугольнике $ABCDEFG$ рассматриваются семь четырёхугольников, вершинами которых являются четыре последовательные по часовой стрелке вершины семиугольника. Могут ли четыре из семи четырёхугольников быть описанными?

5. Найдите все пары $(x; y)$ натуральных чисел, для которых оба числа $x^2 + 8y$; $y^2 - 8x$ являются точными квадратами.

Математика. 11 класс

4 вариант

Работа рассчитана на 240 минут.
Максимальная оценка за каждую задачу – 20 баллов.
Все решения должны быть полными и обоснованными.

1. Какова вероятность, что в случайной последовательности из 8 единиц и двух нулей между двумя нулями ровно три единицы?

2. Каждый из 8 бельчат бросил шишку в какого-нибудь другого бельчонка, независимо от других. Докажите, что всегда найдётся группа из трёх бельчат, которые не бросили шишку в бельчонка из этой группы.

3. Разрешимо ли уравнение $y^2 + y = x^3 - x$ во взаимно простых натуральных числах?

4. Точки P и Q – середины дуг KL и LM, описанной окружности треугольника KLM, LS – биссектриса этого треугольника. Оказалось, что $\angle KLM = 2\angle KML$ и $\angle PSQ = 90^\circ$. Найдите углы треугольника KLM.

5. Докажите, что для всех натуральных n выполняется неравенство

$$\frac{1}{n^2+1} + \frac{2}{n^2+2} + \cdots + \frac{n}{n^2+n} < \frac{1}{2} + \frac{1}{6n}.$$