

Математика. 10 класс

1 вариант

Работа рассчитана на 240 минут.

Максимальная оценка за каждую задачу – 20 баллов.

Все решения должны быть полными и обоснованными.

1. Пять членов жюри олимпиады проверяли работы. Первый, второй и четвертый члены жюри вместе могут проверить работы за 20 часов; второй, третий и пятый вместе – за 15 часов. Если в проверке участвуют все, кроме второго члена жюри, то на проверку работ требуется 10 часов. Во сколько раз быстрее будет выполнена проверка работ всеми членами жюри по сравнению с проверкой работ только вторым членом жюри?
2. Ненулевые числа p , q , r являются тремя последовательными членами арифметической прогрессии. Докажите, что уравнение $px^2 + 2\sqrt{2}qx + r = 0$ имеет два решения.
3. В таблице 10×10 расставлены различные натуральные числа от 1 до 100. Оказалось, что в каждой строке (слева направо) и в каждом столбце (снизу вверх) числа идут в порядке возрастания. Найдите наибольшее возможное значение суммы чисел шестого столбца.
4. Окружность, построенная на стороне KM остроугольного треугольника KLM как на диаметре, пересекает стороны треугольника KL и LM в точках P и Q соответственно. Касательные к этой окружности, проведенные в точках P и Q , пересекаются в точке R . Докажите, что прямая LR перпендикулярна KM .
5. Печенье макарены трёх сортов (фисташковые, ванильные, карамельные) упаковывают в стандартные коробки по 20 печений в каждой. Каждая коробка содержит макарены всех видов, причем порядок их расположения в коробке не существен. Сколько можно составить различных наборов макаренов при условии, что в коробке фисташковых макаренов не менее 2 и не более 12, ванильных тоже не менее 2 и не более 12, а карамельных не менее 3 и не более 14?

Математика. 10 класс

2 вариант

Работа рассчитана на 240 минут.

Максимальная оценка за каждую задачу – 20 баллов.

Все решения должны быть полными и обоснованными.

1. Шесть членов жюри олимпиады проверяли работы. Без пятого они могут проверить работы за 6 дней. Если бы они проверяли вчетвером без первого и третьего, то все работы были бы проверены за 10 дней. Поскольку второй, четвертый и шестой были заняты, работы были проверены оставшимися за 12 дней. Какой процент всех работ при этом был проверен первым и третьим членами жюри за 4 дня?
2. Квадратные трёхчлены $f = ax^2 + bx + c$ и $g = px^2 + qx + r$ не имеют корней, а их сумма $f + g$ – трёхчлен, имеющий корни. Найдите знак произведения $c \cdot r$.
3. В клетках таблицы 7×7 расставлены числа -1 , 0 и 1 так, что в каждом квадрате 3×3 сумма чисел равна 0 . Какое наибольшее значение может принимать сумма всех чисел таблицы?
4. В треугольнике KLM угол LKM тупой. На стороне LM как на диаметре построена окружность, которая пересекает продолжения сторон LK и MK в точках P и Q соответственно. Через точки P и Q проведены касательные к окружности, которые пересекаются в точке R . Докажите, что прямая LR перпендикулярна KM .
5. Печенье макарены трёх сортов (шоколадные, малиновые, апельсиновые) упаковывают в стандартные коробки по 20 печений в каждой. Каждая коробка содержит макарены всех видов, причем порядок их расположения в коробке не существен. Сколько можно составить различных наборов макаренов при условии, что в коробке шоколадных макаренов не менее 3 и не более 14, малиновых тоже не менее 3 и не более 14, а апельсиновых не менее 2 и не более 12?

Математика. 10 класс

3 вариант

Работа рассчитана на 240 минут.

Максимальная оценка за каждую задачу – 20 баллов.

Все решения должны быть полными и обоснованными.

1. В бассейн ведут две одинаковые трубы. Одна труба заполняет бассейн за 3 часа. Сначала включили обе трубы, но через час одна из труб засорилась, и через неё вода стала поступать вдвое медленнее. Через какое время после этого бассейн заполнится?
2. Приведенный квадратный трехчлен $x^2 + px + q$ имеет два корня. Докажите, что если вычесть из p один из этих корней, а q увеличить в два раза, то полученный квадратный трёхчлен будет иметь корень.
3. Клетчатый прямоугольник из 1000 клеток разбит по линиям сетки на прямоугольники одинаковой площади. Какое наибольшее число не равных прямоугольников может найтись среди частей?
4. Внутри трапеции $KLMN$ ($LM \parallel KN$) выбрана точка P так, что $\angle KPL = \angle MPN = 90^\circ$, $\angle LKP + \angle MNP = \angle LPM$. Докажите, что в трапецию $KLMN$ можно вписать окружность.
5. Вася хочет покрасить клетки прямоугольника 3×4 так, чтобы незакрашенной оставалась или первая строка, или последняя строка, или два средних столбца. Сколькими способами он может это сделать?

Математика. 10 класс

4 вариант

Работа рассчитана на 240 минут.

Максимальная оценка за каждую задачу – 20 баллов.

Все решения должны быть полными и обоснованными.

1. Известно, что $3^3 + 4^3 + 5^3 = 6^3$. Докажите, что для любого нечётного натурального n существуют n различных чисел, сумма кубов которых равна кубу натурального числа.
2. На 8 шарах написано по числу: 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9. Сколькими способами можно разложить шары в три коробки так, чтобы ни в одной коробке не было числа и его делителя?
3. Трёхзначное число состоит из разных цифр. Между первой и второй цифрами, а также между второй и третьей цифрами, вписали по n нулей. Докажите, что существует больше одного исходного трёхзначного числа такого, что полученное $(2n + 3)$ -значное число является квадратом целого числа при любых натуральных n .
4. Точка O – центр описанной окружности остроугольного треугольника KLM с углом $\angle L = 30^\circ$. Луч LO пересекает отрезок KM в точке Q . Точка P – середина дуги OM описанной окружности треугольника QOM , не содержащей точку Q . Докажите, что точки K, L, P, Q лежат на одной окружности.
5. Какое наибольшее число клеток квадрата 8×8 можно закрасить так, чтобы центры любых четырёх закрашенных клеток не являлись вершинами прямоугольника, стороны которого параллельны краям квадрата?