ОТВЕТЫ И РЕШЕНИЯ

9 КЛАСС

Общее количество баллов **100. Решение каждой задачи оценивается Жюри из20 баллов** в соответствии с разработанными критериями и методикой оценки:

Баллы	Правильность (ошибочность) решения
20	Полное (верное) решение.
16-20	Верное решение. Имеются небольшие недочёты, в целом не влияющие на решение.
12-16	Решение в целом верное. Однако оно содержит ряд ошибок, либо не рассмотрены отдельные случаи, но может стать правильным после небольших исправлений или дополнений.
8-12	Верно рассмотрен один из двух существенных случаев.
6-8	Доказаны вспомогательные утверждения, помогающие в решении задачи.
2-6	Рассмотрены частные случаи при отсутствии решения (или при ошибочном решении).
0-2	Решение начато, но продвижение незначительное.
0	Решение неверное, продвижения отсутствуют.
0	Решение отсутствует.

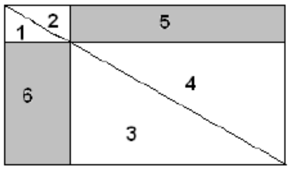
Указания к оцениванию отдельных задач содержатся в комментариях к решениям.

Вариант 1

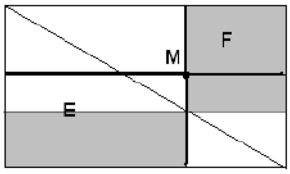
1. Найдите все целые a, при которых модуль числа $|a^2-3a-6|$ равен простому числу.
Ответ.-1; 4.
Решение. Число a^2-3a всегда чётное (как разность двух чётных или двух нечётных), поэтому простое число $|a^2-3a-6|$ может равняться только 2. Уравнение$a^2-3a-6=2$, или $a^2-3a-8=0$, не имеет целых корней. Решая уравнение $a^2-3a-6=-2$, находим корни $a_1=-1, a_2=4$.
Комментарий. *Верное решение – 20 баллов. Есть пробелы в обосновании – 15 баллов. Установлено только, что простое число равно 2 – 2 балла. Решение начато, есть некоторое продвижение – 5 баллов. Решение начато, но продвижение несущественно – 1 балл. Только верный ответ без решения – 1 балл.*

2. Внутри прямоугольника выбрана точка M и через неё проведены прямые, параллельные сторонам прямоугольника. Оказалось, что площади серых прямоугольников равны (см. рисунок). Найдите геометрическое место точек M.

Ответ. Диагонали прямоугольника.
Решение. Выберем любую точку на диагонали, и проведём через неё прямые (см.рисунок). Поскольку прямоугольник делится диагональю на два равных треугольника, их площади равны: $S_2+S_5+S_4=S_1+S_6+S_3$. Но $S_1=S_2$, $S_3=S_4$. Следовательно, $S_5=S_6$.



Покажем, что никакие другие точки, кроме точек диагоналей, не удовлетворяют условию. Пусть точка M не принадлежит диагонали. Прямоугольники с вершиной M обозначим E и F. Проведем из точки M отрезок к какой-нибудь диагонали. Серым закрашены равновеликие прямоугольники. Легко видеть, что прямоугольник E является частью одного из равновеликих прямоугольников, а прямоугольник F содержит равновеликий прямоугольник, поэтому площади E и F не могут быть равны.



Комментарий. *Верное решение – 20 баллов. Доказано, что условие выполняется для точек, лежащих на диагонали – 18 баллов, доказано, что никакие другие точки, кроме точек диагонали, не удовлетворяют условию – 2 балла, баллы суммируются. Есть пробелы в обосновании – 15 баллов. Верный ответ, но обоснование недостаточно – 2 балла. Решение начато, продвижение незначительно – 1 балл.*

3. Алиса написала несколько положительных целых чисел. Саша переписал эти числа и добавил одно целое число, меньше всех чисел Алисы. Каждый из них нашёл сумму и произведение своих чисел и поделил сумму на произведение. У Саши получилось число в 5 раз меньше, чем у Алисы. Какое число он мог добавить?

Ответ.6 или -20.

Решение. Обозначим сумму Алисы a, произведение Алисы b, добавленное число c. Тогда условие можно записать так: $\frac{a}{b}=\frac{a+c}{bc}\cdot 5$, или $ac=5a+5c$. Разложим на множители: $(a-5)(c-5)=25$. Множитель $a-5$ является делителем 25 и может принимать значения $\pm1, \pm5, \pm25$. Тогда $c-5$ принимает значения $\pm25, \pm5, \pm1$. Пары(a,c)принимают значения $(6,30), (4,-20), (10,10), (0,0), (30,6), (-20,4)$. Сразу отбросим невозможные пары, где c не меньше a. Остаются пары $(a;\ c)$: $(30;\ 6), (4;\ -20)$. Для каждой из этих пар существует набор чисел, удовлетворяющий условиям. Для $c=6$: $15, 15, 6$. Действительно, $\frac{30}{225}=\frac{30+6}{225\cdot 6}\cdot 5=\frac{2}{15}$. Для $c=-20$: $2, 2, -20$. Действительно, $\frac{4}{4}=\frac{4-20}{4(-20)}\cdot 5=1$.

Комментарий. *Верное решение – 20 баллов. Баллы раскладываются так: за каждое найденное значение – 10 баллов; если значения найдены подбором, и не доказано, что в данной области других значений нет – по 8 баллов за одно значение. Найдены все значения, но отрицательные отброшены – 18 баллов. Есть продвижение – 5 баллов. Решение начато, но продвижение незначительно – 2 балла. Дан верный ответ без объяснений – 0 баллов.*

4. В трапеции $ABCD$ основания AD и BC относятся как $AD:BC\ =3:2$, боковая сторона AB перпендикулярна основаниям. На стороне AB выбрана точка K так, что $KA:AB=3:5$. Из точки K проведён перпендикуляр кCD, пересекающий отрезок CD в точке P. Докажите, что $\angle KPA=\angle KPB$.

Решение. Из условия следует, что $KA:KB=3:2$. Треугольники KDA и KBC подобны как прямоугольные с пропорциональными катетами, поэтому $\angle KCB=\angle KDA$. Четырёхугольник $ADPK$ вписанный, так как $\angle KPD=\angle KAD=90°$, следовательно, $\angle KDA=\angle KPA$ (эти углы опираются на одну дугу). Аналогично, поскольку

четырёхугольник $KPCB$ вписан в окружность, получаем, что $\angle KCB = \angle KPB$, а тогда и $\angle KPA = \angle KPB$.
Комментарий. *Верное решение – 20 баллов. Баллы раскладываются так: доказано подобие треугольников KDA и KBC– 5 баллов; доказано, что четырехугольники вписанные – 12 баллов, сделан окончательный вывод – 3 балла. Решение не закончено, но есть продвижение – 5 баллов. Решение начато, но продвижение незначительно – 1 балл.*

5. Натуральные числа, кратные 3, покрасили в два цвета: красный и синий, так, что сумма синего и красного числа – красная, а произведение синего и красного числа – синее. Сколькими способами можно раскрасить числа, чтобы число 546 было синим?
Ответ. 7.
Решение. Докажем, что все синие числа кратны одному и тому же числу. Сначала докажем, что произведение двух синих чисел – синее. Предположим, что утверждение не верно. Пусть a и b – два таких синих числа, что их произведение равно красному числу. Пусть d – некоторое красное число (можно взять и $d = ab$). Тогда $a + d$ – красное. Отсюда следует, что$a \cdot b + b \cdot d = b(a + d)$– синее, так как синее числоbумножили на красное число$a + d$. Число $b \cdot d$ тоже синее, а число $a \cdot b$ по предположению красное. Получили, что сумма синего и красного числа – синее, что противоречит условию. Следовательно, предположение не верно, и произведение любых двух синих чисел – синее число. Вместе с условием это означает, что произведение синего числа и любого – синее число.
Пусть a_0 – наименьшее синее число, a – произвольное синее число. Его можно представить как $a = k \cdot a_0 + r$, где $0 \le r < a_0$. Остаток r не может быть синим числом, так как a_0 – наименьшее синее число. Произведение $k \cdot a_0$, по доказанному, синее число. Стоящая справа сумма синего и красного по условию красное число, но в левой части равенства синее число; противоречие. Следовательно, остаток $r = 0$, и произвольное синее число нацело делится на наименьшее синее число. Число $546 = 2 \cdot 3 \cdot 7 \cdot 13$. Рассматриваются только числа, кратные 3, и синими среди них могут быть все числа, кратные 6, или кратные 21, или кратные 39, или кратные 42, или кратные 78, или кратные 273, или кратные 546; всего 7 способов.
Комментарий. *Найдены все способы – 20 баллов. Установлено, что синие числа кратны делителям числа 546, но верный ответ не получен – 15 баллов. В отсутствии общего решения найден хотя бы один способ – 5 баллов. Есть пробелы в обосновании – 15 баллов. Решение начато, есть небольшое продвижение – 2 балла.*

Вариант 2

1. Сумма двух чисел равна 2022. Если у первого числа стереть последнюю цифру 5, а ко второму числу справа приписать цифру 1, то сумма изменённых чисел станет равна 2252. Найдите исходные числа.
Ответ. 1815 и 207.
Решение. Обозначим исходные числа x и y. Составим систему
$$\begin{cases} x + y = 2022, \\ \dfrac{x - 5}{10} + 10y + 1 = 2252. \end{cases}$$
Решая систему, находим $x = 1815, y = 207$.
Комментарий. *Верное решение – 20 баллов. Решение не закончено, но есть продвижение – 5 баллов. Верный ответ найден подбором, не показано, что других значений нет – 5 баллов. Решение начато, но продвижение незначительно – 1 балл.*

2. Периметр треугольника равен 4. Докажите, что сумма квадратов длин сторон больше 5.

Решение.Если треугольник равносторонний со стороной $a = \frac{4}{3}$, то неравенство выполняется, так как $3a^2 = 3 \cdot \left(\frac{4}{3}\right)^2 = \frac{16}{3} > 5$. Пусть произвольный треугольник имеет стороны $a + x,\ a + y,\ a + z,$ где $x + y + z = 0$. Тогда

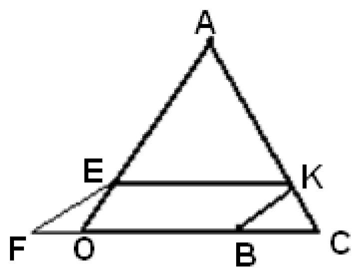
$$(a + x)^2 + (a + y)^2 + (a + z)^2 = 3a^2 + 2a(x + y + z) + x^2 + y^2 + z^2 \geq 3a^2 > 5.$$

Комментарий. *Верное решение – 20 баллов. Есть пробелы в обосновании – 15 баллов. Без доказательства используется тот факт, что сумма квадратов наименьшая, когда слагаемые равны – 7 баллов. Решение не закончено, но есть продвижение – 5 баллов. Решение начато, но продвижение незначительно – 1 балл.*

3. Два бельчонка находятся в точках A и B, и начинают одновременно скакать по мымAO и BO по направлению к точке O (пройдя точку O, каждый продолжает движение по своей прямой). Расстояние $AO = 120$ метров, $BO = 80$ метров, угол $AOB = 60°$. У бельчат постоянная одинаковая скорость. Каково наименьшее расстояние между бельчатами во время движения?

Ответ.$20\sqrt{3}$ метров.

Решение. Пусть бельчата пройдут расстояние $d = AE = BF$. Проведём через точку Eпрямую, параллельную OB, и отложим на ней отрезок EK, равный AE. Проведём прямую AK, пусть она пересекает прямую OB в точке C.



Треугольник AEK равнобедренный с углом 60°, то есть равносторонний, значит, подобный ему треугольник AOC тоже равносторонний, $OA = OC = AC = 120$. Четырёхугольник $EKBF$ – параллелограмм, так как $EK = AE = BF$, и $EK||OB$.

Значит, расстояние между бельчатами, равное EF, равно BK, где K – текущая точка на прямой AC. Прямая AC определяется точками A и C, равноотстоящими от точки O на 120 метров. Таким образом, надо найти кратчайшее расстояние от фиксированной точки B до прямой AC. Это расстояние измеряется по перпендикуляру, то есть бельчата будут ближе всего друг к другу, когда BK перпендикулярно AC. В прямоугольном треугольнике BKC гипотенуза BC равна $120 - 80 = 40$ метров, $\angle BCK = 60°$ значит, кратчайшее расстояние равно $40 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = 20\sqrt{3}$ (метров).

Комментарий. *Верное решение – 20 баллов. При верном решении ответ неверный из-за ошибки в вычислениях в конце – 19 баллов. Рассмотрены 3 варианта расположения бельчат, выбран правильный, но в нём не доказана минимальность – 15 баллов. В решении есть ошибки – 10 баллов. Решение не закончено, но есть продвижение – 5 баллов. Решение начато, но продвижение незначительно – 1 балл.*

4. Найдите наименьшее натуральное $n > 1$, для которого сумма никаких двух натуральных степеней не является точным квадратом натурального числа.

Ответ.4.

Решение. Для $n = 2$: $2^1 + 2^1 = 2^2$. Для$n = 3$: $3^3 + 3^2 = 6^2$ Пусть $n = 4$. Предположим, существуют такие $m,\ k$, что $4^m + 4^k = a^2$.

Любая степень 4 даёт при делении на 3 остаток 1 (так как $4^m = (3 + 1)^m$). Следовательно, $4^m + 4^k$ даст при делении на 3 остаток 2. Но квадрат целого числа даёт при делении на 3 только остаток 0 или 1.

Комментарий. *Верное решение – 20 баллов. Доказано, что $n \geq 4$ – 12 баллов. Доказано, что $n \geq 3$ – 3 балла. Доказано, что $n \leq 5$ – 3 балла. Решение не закончено, но есть продвижение – 5 баллов. Решение начато, но продвижение незначительно – 1 балл.*

5. Можно ли отметить на клетчатой бумаге 5 точек пересечения линий сетки так, чтобы эти точки были вершинами равностороннего пятиугольника?

Ответ. Нет.

Решение. Предположим, такие целочисленные пятиугольники существуют; возьмём пятиугольник с наименьшей стороной. Выберем начало координат, проведём оси. Каждой стороне будет соответствовать вектор $\bar{a}_i = (x_i, y_i)$, ${x_i}^2 + {y_i}^2 = a^2$. Направление векторов выберем по часовой стрелке, так что $\bar{a}_1 + \bar{a}_2 + \cdots \bar{a}_5 = 0$. Тогда $x_1 + x_2 + \cdots x_5 = 0$ и $y_1 + y_2 + \cdots y_5 = 0$. Возведём каждое из двух последних равенств в квадрат, сложим, и подставим ${x_i}^2 + {y_i}^2 = a^2$, получим: $5a^2 = -2 \cdot S$, где S – сумма попарных произведений абсцисс и попарных произведений ординат. Отсюда a^2 делится на 2. Если a^2 делится на 4, то ${x_i}^2 и {y_i}^2$ нацело делятся на 4 (это следует из соотношения ${x_i}^2 + {y_i}^2 = a^2$, и того, что квадрат целого числа даёт при делении на 4 остаток 0 или 1). Значит, существует равносторонний пятиугольник с вершинами в узлах сетки со стороной в 2 раза меньше. Но это противоречит предположению о выборе наименьшего пятиугольника. Если a^2 делится только на 2, но не 4, то для любого $i x_i$и y_i – нечётные числа. Тогда сумма произведений S – чётное число, так как она содержит чётное количество нечётных чисел (поровну произведений $x_i x_j$ и $y_i y_j$). Поэтому из равенства $5a^2 = -2 \cdot S$ следует, что a^2 делится на 4. Полученное противоречие доказывает, что предположение неверно, и искомый пятиугольник не существует.

Комментарий. *Верное решение – 20 баллов. Верный ответ получен из рассмотрения нескольких примеров – 10 баллов. Есть идеи решения – 5 баллов. Решение начато, но продвижение незначительно – 1 балл.*

Вариант 3

1. Сколько существует правильных несократимых дробей, у которых сумма числителя и знаменателя равна 100?

Ответ. 20.

Решение. Рассмотрим уравнение $a + b = 100$. Если $a и b$ имеют общий делитель, то этот делитель имеет и число 100, то есть у $a и b$, удовлетворяющих уравнению, простыми общими делителями могут быть только 2 и 5. Разобьём все числа на пары $(a, 100 - a)$. Поскольку дробь $\frac{a}{b}$несократима, исключим из чисел от 1 до 100 чётные числа (останется 50 чисел), и числа, кратные 5 (останется 40 чисел). Среди этих 40 чисел каждому числу a соответствует число $100 - a$, так как если a нечётно и не кратно 5, то и $100 - a$ обладает этими свойствами. В числитель дроби будем записывать меньшее из чисел $a, 100 - a$. Получится 20 пар.

Комментарий. *Верное решение – 20 баллов. Неполное обоснование – 15 баллов. При верном решении одна ошибка в подсчёте – 18 баллов. Решение не закончено или не верно, но есть хорошее продвижение – 10 баллов. Решение начато, есть некоторое продвижение – 5 баллов. Решение начато, но продвижение несущественно – 1 балл. Только верный ответ без решения – 1 балл.*

2. У двоих бельчат было одинаковое количество сосновых шишек и одинаковое количество кедровых шишек. Всего шишек у каждого бельчонка было меньше 25. Первый бельчонок набрал ещё столько же сосновых шишек, сколько у него было, и 26 кедровых шишек. У него оказалось больше сосновых, чем кедровых. Второй бельчонок набрал ещё столько же кедровых шишек, сколько у него было, а 4 сосновые съел. У него оказалось больше кедровых, чем сосновых. Сколько сосновых и кедровых шишек было у каждого бельчонка изначально?

Ответ.17 сосновых шишек, 7 кедровых шишек.

Решение. Обозначим число сосновых шишек x и число кедровых шишек y. Запишем условия: $\begin{cases} x+y<25 \\ 2x>y+26 \\ 2y>x-4. \end{cases}$

Сложим второе и третье неравенства: $2(x+y)>x+y+22,$ или $x+y>22$. Но $x+y<25$, поэтому $x+y$ может равняться только 23 или 24. Пусть $x+y=23$. Тогда $y=23-x,$ и система примет вид $\begin{cases} 2x>23-x+26 \\ 46-2x>x-4 \end{cases}$ или $\begin{cases} x>\frac{49}{3} \\ x<\frac{50}{3} \end{cases}$. В этом промежутке нет целых чисел.

Пусть $x+y=24$. Тогда $y=24-x,$ и система примет вид

$\begin{cases} 2x>24-x+26 \\ 48-2x>x-4 \end{cases}$ или $\begin{cases} x>\frac{50}{3} \\ x<\frac{52}{3}. \end{cases}$

В промежутке $\left(\frac{50}{3};\frac{52}{3}\right)$ есть целое число 17. Поэтому $x=17, y=7$.

Комментарий. *Верное решение – 20 баллов. При верном решении одна ошибка в подсчёте – 18 баллов. Найдено общее число шишек, но решение не закончено – 15 баллов. Решение начато, есть некоторое продвижение – 5 баллов. Решение начато, но продвижение несущественно – 1 балл. Только верный ответ без решения – 1 балл.*

3. Сумма m последовательных натуральных чисел равна простому числу p. Чему может равняться m?

Ответ. 1 и 2.

Решение. Сумма m последовательных чисел от k до $k+m-1$ включительно равна $\frac{(2k+m-1)m}{2}$. Эта сумма должна равняться p, то есть множители равны 1 и р. Если $m>2$ и m нечётное, то m равно p. При $m=p$: $\frac{2k+p-1}{2}=1, 2k+p=3$, что невозможно. Если $m>2$ и чётное, то $m/2=p$. В этом случае $m=2p, 2k+2p-1=1,$ то есть $k+p=1$, что невозможно. Таким образом, $m\le 2$. При $m=1$ надо взять одно число p. При $m=2$ получаем $2k+1=p$. Складываются два последовательных числа k и $k+1$, равных соответственно $\frac{p-1}{2}$ и $\frac{p+1}{2}$.

Комментарий. *Верное решение – 20 баллов. Найден ответ – 10 баллов, доказано, что других ответов нет – 10 баллов, баллы суммируются. Нет примера реализации – снимается 1 балл для каждого случая. Пропущен без пояснений ответ $m=1$ – снимается 2 балла. Есть пробелы в доказательстве – 15 баллов. Решение начато, есть некоторое продвижение – 5 баллов. Решение начато, но продвижение несущественно – 1 балл. Только верный ответ без решения – 1 балл.*

4. В прямоугольнике $ABCD$ сторона $BC=3$. На середине стороны AB отмечена точка P. Из точки C опущен перпендикуляр CQ на DP. Найдите длину BQ.

Ответ. 3.

Решение. Продлим прямые CB и DP до пересечения в точке M. Треугольники MBP и DAP равны, так как они прямоугольные, имеют равные катеты и равные вертикальные углы. Значит, $MB=AD=BC$. Таким образом, BQ – медиана прямоугольного треугольника MQC, и равна половине гипотенузы MC, то есть 3.

Комментарий. *Верное решение – 20 баллов. Доказаны потенциально полезные утверждения – 5 баллов. Решение начато, но продвижение незначительно – 1 балл.*

5. Таблица 7×7 заполняется целыми ненулевыми числами. Сначала по рамке таблицы расставляются отрицательные числа. Дальше клетки заполняются в произвольном поряд-

ке, и очередное число равно произведению поставленных ранее чисел, ближайших к нему по строке или ближайших к нему по столбцу. Какое наибольшее количество положительных чисел может быть в таблице?

Ответ. 24.

Решение. *Оценка.* Докажем, что в закрашенной области должно стоять хотя бы одно отрицательное число. Пусть это не так. Рассмотрим ту угловую клетку закрашенной области, в которую ставили число последней из четырёх угловых (она закрашена чёрным). По предположению, если в клетках её строки и её столбца и поставлены некоторые другие числа, то они положительные. Поэтому в чёрной клетке должно стоять отрицательное число. Всего отрицательных чисел не меньше $4 \cdot 6 + 1 = 25$, соответственно положительных чисел не больше 24.

−	−	−	−	−	−	−
−	+				+	−
−						−
−						−
−						−
−					+	−
−	−	−	−	−	−	−

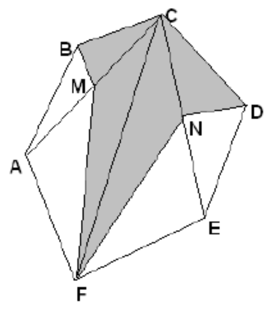
Пример. Будем расставлять числа в закрашенной области в порядке, указанном цифрами. В клетках 1, 2 выберем сомножители по столбцу, в клетках 3, 4 выберем сомножители по строке, получим положительные числа. В клетке 5 – отрицательное число. Все остальные клетки можно заполнить положительными числами, всего их будет 24.

−	−	−	−	−	−	−
−	1				2	−
−						−
−						−
−	4					−
−	5				3	−
−	−	−	−	−	−	−

Комментарий. *Верное решение – 20 баллов. Предложен способ заполнения, не являющийся оптимальным – 5 баллов. Если при этом не указана последовательность заполнения клеток – 1 балл.*

Вариант 4

1. В выпуклом шестиугольнике $ABCDEF$ точка M – середина отрезка AC, точка N – середина отрезка CE. Докажите, что площадь закрашенной фигуры равна половине площади шестиугольника $ABCDEF$.



Решение. Отрезки BM, FM, FN, DN являются медианами треугольников ABC, ACF, FCE, ECD. Каждая медиана делит соответствующий треугольник на два равновеликих треугольника, ввиду равенства высот и оснований.

Комментарий. *Верное решение – 20 баллов. Доказаны потенциально полезные утверждения – 5 баллов. Решение неверно или отсутствует – 0 баллов. Решение начато, но продвижение незначительно – 1 балл.*

2. Девять бельчат соревновались в беге на 50 метров, у всех были разные результаты. Потом их разбили на три группы по 3 бельчонка. Первая и вторая группы соревновались между собой по таким правилам: какой-нибудь бельчонок из первой группы бежал с каким-нибудь бельчонком из второй группы. Потом другой бельчонок из первой группы бежал с другим бельчонком из второй группы. И наконец, соревновались оставшиеся бельчата из первой и второй групп. У какой группы больше побед из трёх забегов, та и выиграла. Затем так же соревновались вторая и третья группы, потом первая и третья. Все бельчата бежали с той же скоростью, как в начале, когда соревновались все вместе. Могло ли быть так, что первая группа выиграла у второй, вторая у третьей, третья у первой? Если нет – докажите; если да – покажите, как это могло быть.
Ответ. Да.
Решение. Приведём пример, как это могло быть. Присвоим каждому бельчонку номер от 1 до 9 (1 – самый быстрый, 9 – самый медленный). Пусть в первой группе бельчата с номерами $1,5,9$, во второй – с номерами $2,6,7$, в третьей – с номерами $3,4,8$. Когда соревнуются первая и вторая группы, бельчонок номер 1 выигрывает у номера 2, бельчонок номер 5 выигрывает у номера 6, и первая группа выиграла у второй. Когда соревнуются вторая и третья группы, бельчонок номер 2 выигрывает у номера 3, бельчонок номер 6 выигрывает у номера 8, и вторая группа выиграла у третьей. Когда соревнуются третья и первая группы, бельчонок номер 3 выигрывает у номера 5, бельчонок номер 4 выигрывает у номера 9, и третья группа выиграла у первой.
Комментарий. *Верное решение – 20 баллов. В примере нарушено условие, что все скорости разные – 15 баллов. Записаны неравенства, но пример реализации отсутствует – 10 баллов. Решение неверно или отсутствует – 0 баллов.*

3. На доске были записаны два неравенства, каждое из которых выполняется для некоторых чисел $a \geq b \geq c \geq 0$.

$$(1) a^2 + b^2 + c^2 \leq 2(ab + bc + ac),$$
$$(2) a^4 + b^4 + c^4 \leq 2(a^2b^2 + b^2c^2 + a^2c^2).$$

Настя считает, что неравенства (1) и (2) равносильны, Петя – что из (1) следует (2), Нина – что из (2) следует (1), Даня – что они все не правы. Чьи высказывания истинны?
Ответ. Дани.
Решение. При $a = 4,\ b = 1, c = 1$ неравенство (1) выполняется, а неравенство (2) – нет, так как $16 + 1 + 1 = 18 \leq 2(4 + 4 + 1) = 18$, но $4^4 + 1^4 + 1^4 = 258 > 2(4^2 1^2 + 4^2 1^2 + 1^2 1^2) = 66$. Значит, из (1) не следует (2).
При $a = 4,\ b = 3, c = -2$ неравенство (2) выполняется, а неравенство (1) – нет, так как $4^4 + 3^4 + 2^4 = 353 \leq 2(4^2 2^2 + 4^2 3^2 + 3^2 2^2) = 488$, но $16 + 9 + 4 = 29 > 2(12 - 8 - 6) = -4$ Значит, из (2) не следует (1).
Комментарий. *Верное решение – 20 баллов. Доказано, что из (2) не следует (1) – 10 баллов, доказано, что из (1) не следует (2) – 10 баллов. За каждый случай, когда обоснование недостаточно, например, не произведена проверка (решение одного неравенства указано, но не подставлено в другое неравенство), снимается 3 балла. Решение неверно или отсутствует – 0 баллов.*

4. Окружность, проходящая через вершины L и M трапеции$KLMN$, пересекает боковые стороны KL и MN в точках P и Q соответственно и касается основания KN в точке S. Оказалось, что $\angle LSM = 50^{\circ}$, а $\angle KLS = \angle SNM$. Найдите $\angle PSQ$.
Ответ.65°.
Решение. Поскольку KS – касательная к окружности, то

$$\angle KSP = \angle SQP = \angle SLP = \angle KLS = \angle SNM.$$

Но $\angle KSP$ и $\angle SNM$ – соответственные углы для прямыхPS и MN, поэтому $PS \parallel MN$ и вписанный четырехугольник $SQMP$ является трапецией. Следовательно, это равнобедренная трапеция и, значит, $\angle PSQ = \angle SPM = \angle SLM$, последнее по вписанности четырёхугольника $SPLM$. Из параллельности прямых KN и LM имеем

$$\angle SLM = \angle KSL = \angle KSP + \angle PSL = \angle SMP + \angle PML = \angle LMS.$$

Стало быть,

$$2\angle PSQ = 2\angle SLM = \angle SLM + LMS = 180^{\circ} - \angle LSM = 130^{\circ}.$$

Комментарий. *Верное решение – 20 баллов. Решение не доведено до конца, есть хорошее продвижение – 10 баллов. Решение начато, есть некоторое продвижение – 2 балла. Решение неверно или отсутствует – 0 баллов.*

5. Бельчонок собрал в лесу 15 орехов весом $50, 51, \dots, 64$ граммов. Ему известен вес каждого из орехов. С помощью чашечных весов бельчонок пытается доказать своим друзьям, что первый орех весит 50 г., второй – 51 г., третий – 52 г. и т.д. (вначале друзья ничего не знают про веса орехов). Какое наименьшее количество гирь потребуется бельчонку, если и гири, и орехи можно размещать на обеих чашах весов, а количество взвешиваний неограниченно? (Веса гирь известны как бельчонку, так и друзьям. В наличии неограниченный запас гирь весом $1, 2, \dots, 1000$ г.)

Ответ. Одна гиря.

Решение. Заметим, что вообще без гирь обойтись не удастся, поскольку если вес каждого ореха уменьшить в два раза, то результаты всех взвешиваний не изменятся. Покажем, что бельчонок сможет управиться с помощью одной гири весом в 1 г. Сначала он убедит друзей, что орехи весят n, $(n+1), \dots, (n+14)$ г. Для этого он положит на одну чашу весов орех массой 51 г., а на другую чашу – орех массой 50 г. и гирю. Весы покажут равенство, и друзья узнают, что взвешенные орехи отличаются ровно на один грамм. Затем тоже самое нужно сделать с орехами весом 52 и 51 и т.д. Наконец, с помощью последнего взвешивания бельчонок покажет друзьям, чему равно n. Для этого он положит на одну чашу весов орехи весом от 50 до 57 г., а на другую – остальные орехи и гирю. Весы вновь покажут равенство. Таким образом, друзья будут знать, что

$$n + (n+1) + \dots + (n+7) = (n+8) + (n+9) + \dots + (n+14) + 1.$$

Поэтому, $8n + 28 = 7n + 78$, т.е. $n = 50$.

Комментарий. *Верное решение – 20 баллов. Приведено решение с 2 гирями – 2 балла. Приведено решение с числом гирь больше 2 – 1 балл. Решение неверно или отсутствует – 0 баллов.*