ОТВЕТЫ И РЕШЕНИЯ

8 КЛАСС

Общее количество баллов **100. Решение каждой задачи оценивается Жюри из 20 баллов** в соответствии с разработанными критериями и методикой оценки:

Баллы	Правильность (ошибочность) решения
20	Полное (верное) решение.
16-20	Верное решение. Имеются небольшие недочёты, в целом не влияющие на решение.
12-16	Решение в целом верное. Однако оно содержит ряд ошибок, либо не рассмотрены отдельные случаи, но может стать правильным после небольших исправлений или дополнений.
8-12	Верно рассмотрен один из двух существенных случаев.
6-8	Доказаны вспомогательные утверждения, помогающие в решении задачи.
2-6	Рассмотрены частные случаи при отсутствии решения (или при ошибочном решении).
0-2	Решение начато, но продвижение незначительное.
0	Решение неверное, продвижения отсутствуют.
0	Решение отсутствует.

Вариант 1

1) Существует ли прямоугольный параллелепипед, все стороны которого выражаются целыми числами, а объем численно равен его площади поверхности?
Ответ. Да, существует.
Решение. Подходит, например, куб $6 \times 6 \times 6$. И площадь поверхности, и объем численно равны 216.

2) Оба корня квадратного трехчлена $x^2 + px + q$ увеличили на 3, после чего получились корни трехчлена $x^2 - 2px - q$. Найдите p и q.
Ответ. $p = 2$, $q = -\frac{3}{2}$.
Решение. Пусть u и v – корни трехчлена $x^2 + px + q$. Тогда по теореме Виета $u + v = -a$ и $uv = b$. По условию $u + 3$ и $v + 3$ – корни трехчлена $x^2 - 2px - q$. Тогда по теореме Виета

$$2p = (u+3) + (v+3) = u + v + 6 = 6 - p,$$
$$-q = (u+3)(v+3) = uv + 3(u+v) + 9 = q - 3p + 9.$$

Следовательно,

$$p = 2 \text{ и } 2q = 3p - 9 = -3,$$

откуда $q = -\frac{3}{2}$. Поскольку полученное q отрицательно, у найденного трехчлена $x^2 + px + q$ есть два корня.

3) Серединные перпендикуляры к диагоналям LN и KM выпуклого четырехугольника $KLMN$ пересекают сторону KN в точках P и Q соответственно (P лежит между K и Q). Оказалось, что $LP \parallel MQ$. Докажите, что $LN \perp KM$.

Решение. Серединный перпендикуляр к диагонали LN (проходящий через точку P) является биссектрисой угла LPN. Аналогично, второй серединный перпендикуляр – биссектриса угла KQM. Из параллельности прямых LP и MQ следует, что эти серединные перпендикуляры перпендикулярны друг другу. Действительно, $\angle LPQ + \angle PQM = 180^{\circ}$, так как $LP \parallel MQ$. Пусть O – точка пересечения этих перпендикуляров, тогда $\angle OPQ + \angle PQO = 90^{\circ}$, а значит, $\angle POQ = 90^{\circ}$, т.е. $OP \perp OQ$. Ну а раз перпендикуляры к диагоналям перпендикулярны, то и сами диагонали KM и LN тоже перпендикулярны.

4) Числа $1, 2, 3, \dots, 9, 10$ записали в ряд в произвольном порядке, и посчитали следующие суммы: первая сумма S_1 равняется первому числу, вторая сумма S_2 равняется сумме первого и второго чисел, S_3 равняется сумме первого, второго и третьего чисел, и т.д. Последняя сумма S_{10} равняется сумме всех чисел. Какое наибольшее возможное количество простых чисел может оказаться среди сумм $S_1, S_2, \dots, S_{10}$?

Ответ.7.

Решение. Прибавление нечётного числа меняет чётность суммы на противоположную, а среди чётных чисел только 2 – простое число. Пусть b_1, b_2, b_3, b_4, b_5 – нечётные числа в том порядке, как они выписывались в строку. Тогда при прибавлении b_2 и прибавлении b_4 получающиеся суммы S_k и S_n – чётные числа, большие 2. Поэтому S_k, S_n и $S_{10} = 55$ – составные числа. Пример в таблице показывает расположение в строку чисел ровно с 7 простыми суммами.

№	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
a_i	7	6	4	2	9	1	3	5	10	8
S_i	**7**	**13**	**17**	**19**	28	**29**	32	**37**	**47**	55

5) Шесть команд провели турнир – каждая команда сыграла с каждой по разу. За ничью начислялось 1 очко, за проигрыш очков не давалось. Шесть команд набрали соответственно 12, 10, 9, 8, 7 и 6 очков. Сколько очков (не обязательно целое число) начислялось за победу?

Ответ. 4 очка.

Решение. Всего в турнире было сыграно $6 \cdot 5 : 2 = 15$ матчей. Пусть за победу начислялось x очков, было k результативных встреч и $15 - k$ ничьих. Тогда суммарно команды набрали $xk + 2(15 - k)$ очков. По условию эта сумма равна $12 + 10 + 9 + 8 + 7 + 6 = 52$, откуда $(x - 2)k = 22$. Тогда из ограничения $k \leq 15$ получаем, что $x > 3$. Команда, занявшая последнее место, одержала хотя бы одну победу, иначе она набрала бы не больше 5 очков. Но так как $x > 3$, то и болееодного матча она выиграть не могла, поэтому одержала ровно одну победу. Значит, за победу в матче начислялось целое число очков, причём не большее 6. Теперь из равенства $(x - 2)k = 22$ понятно, что $x = 4$. Пример турнира, удовлетворяющего условию, приведен в таблице.

Команда	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**Сумма**
1		0	0	4	4	4	12
2	4		4	0	1	1	10
3	4	0		0	1	4	9
4	0	4	4		0	0	8
5	0	1	1	4		1	7
6	0	1	0	4	1		6

Вариант 2

1) Существует ли прямоугольный параллелепипед, все стороны которого выражаются целыми числами, а площадь его поверхности численно равна сумме длин всех его рёбер?
Ответ. Да, существует.
Решение. Подходит, например, куб $2 \times 2 \times 2$. И площадь поверхности, и сумма длин рёбер численно равны 24.

2) Квадратный трехчлен $x^2 + 3px + p$ имеет корни u и v, а квадратный трехчлен $x^2 - 4qx + q$ имеет корни $\frac{1}{u}$ и $\frac{1}{v}$. Найдите p и q.
Ответ. $p = -\frac{4}{3}$, $q = -\frac{3}{4}$.
Решение. По условию u и v – корни трехчлена $x^2 + 3px + p$. Тогда по теореме Виета $uv = p$ и $u + v = -3p$. По условию $\frac{1}{u}$ и $\frac{1}{v}$ – корни трехчлена $x^2 - 4qx + q$. Тогда по теореме Виета $\frac{1}{uv} = q$ и $\frac{1}{u} + \frac{1}{v} = 4q$, откуда

$$pq = uv \cdot \frac{1}{uv} = 1 \text{ и } 4q = \frac{1}{u} + \frac{1}{v} = \frac{u+v}{uv} = -\frac{3p}{p} = -3.$$

Стало быть, $q = -\frac{3}{4}$ и $p = \frac{1}{q} = -\frac{4}{3}$. Поскольку свободные члены найденных трехчленов отрицательны, оба трехчлена имеют по два корня.

3) Серединные перпендикуляры к диагоналям KM и LN выпуклого четырехугольника $KLMN$ пересекают прямую LM в точках P и Q соответственно (P лежит на продолжении отрезка LM за точку L, а Q – за точку M). Оказалось, что $KP \parallel NQ$. Докажите, что $LN \perp KM$.
Решение. Задача решается аналогично задаче 3 варианта 1.

4) Сумма двух целых чисел равна 100, и сумма двух других целых чисел тоже равна 100. Числа в первой паре перемножили и сложили с произведением чисел во второй паре. Могла ли сумма этих двух произведений равняться 1001?
Ответ. Не могла.
Решение. Предположим, что сумма произведений могла равняться 1001. Сумма двух чисел (в данном случае – этих произведений) может быть нечётной, только когда одно из них чётно, а другое – нечётно. Значит, одно из произведений чётно, а другое нечётно. Если сумма двух чисел равна 100, а их произведение нечётно, то оба числа должны быть нечётными, при этому одно из них должно давать остаток 1 при делении на 4, а другое – остаток 3 при делении на 4. Тогда остаток от деления их произведения на 4 равен $1 \cdot 3 = 3$. Если сумма двух чисел равна 100, а их произведение чётно, то оба числа должны быть чётными. Тода их произведение даёт остаток 0 при делении на 4. Таким образом, сумма двух произведений будет дават остаток 3 при делении на 4. Получили противоречие, так как 1001 даёт остаток 1 при делении на 4.

5) Шесть команд провели турнир – каждая команда сыграла с каждой по разу. За ничью начислялось 1 очко, за проигрыш очков не давалось. Шесть команд набрали соответственно 10, 7, 6, 6, 3 и 3 очков. Сколько очков (не обязательно целое число) начислялось за победу?
Ответ. 2,5 очка.
Решение. Всего в турнире было сыграно $6 \cdot 5 : 2 = 15$ матчей. Пусть за победу начислялось x очков, было k результативных встреч и $15 - k$ ничьих. Тогда суммарно команды набрали $xk + 2(15 - k)$ очков. По условию эта сумма равна $10 + 7 + 6 + 6 + 3 + 3 = 35$, откуда $(x - 2)k = 5$. Следовательно, $x > 2$. Команда, набравшая 6 очков, выиграла хотя бы один матч, иначе она набрала бы не больше 5 очков. Из ограничения $x > 2$ следует,

что она моглы выиграть не более двух матчей. Значит, x – целое или полуцелое число, в таком случае k – делитель числа 10. С другой стороны, $k \geq 4$, поскольку у каждой из первых четырёх команд есть хотя бы одна победа. Следовательно, возможны только два варианта.
1) $k = 5, x = 3$. Но в этом случае команда, набравшая 10 очков, должна была одержать ровно три победы, т.е. $k \geq 6$. Противоречие.
2) $k = 10, x = 2{,}5$. Пример такого турнира приведен в таблице.

Команда	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**Сумма**
1		2,5	2,5	0	2,5	2,5	10
2	0		2,5	2,5	1	1	7
3	0	0		2,5	2,5	1	6
4	2,5	0	0		1	2,5	6
5	0	1	0	1		1	3
6	0	1	1	0	1		3

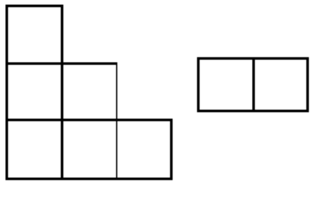
Вариант 3

1) Существует ли прямоугольный треугольник, гипотенуза которого численно равна половине его площади?
Ответ. Да, существует.
Решение. Таких треугольников довольно много. Докажем, что существует равнобедренный. Составим уравнение, обозначив его сторону за a: $\frac{a^2}{2} = 2\sqrt{2}a$. Оно, очевидно, имеет решение $a = 4\sqrt{2}$.

2) Квадратный трехчлен $px^2 + qx + r$ имеет два корня. Докажите, что трехчлен $3px^2 + 2(p+q)x + (q+r)$ также имеет два корня.
Решение. По условию дискриминант первого трехчлена положителен: $q^2 - 4pr > 0$. Рассмотрим дискриминат второго трехчлена:
$$4(p+q)^2 - 4 \cdot 3p(q+r) = 4(p^2 + 2pq + q^2 - 3pq - 3pr) =$$
$$= 4p^2 - 4pq + 4q^2 - 12pr > 4p^2 - 4pq + q^2 = (2p - q)^2 \geq 0.$$
Он положителен, следовательно, у второго трехчлена также есть два корня.

3) Известно, что в трапеции $KLMN$ боковая сторона KL равна основанию LM. Точки P и Q – середины оснований KN и LM соответственно, причем точка P лежит на биссектрисе угла L. Докажите, что $LN = 2PQ$.
Решение. Пусть Q_1 – середина KL. Треугольники LPQ и LPQ_1 равны по двум сторонам и углу ($\angle PLQ = \angle PLQ_1$, $LQ = LQ_1$ как половины равных отрезков LK и LM, сторона LP общая). Значит, $PQ_1 = PQ$. Но PQ_1 – средняя линия в треугольнике KLN. Значит, $2PQ_1 = LN$.

4) Квадрат размером 100×100 клеток разбит на фигурки двух типов, изображённые на рисунке. Может ли оказаться, что фигурок из шести клеток ровно 333? Фигурки можно поворачивать и переворачивать.



Ответ. Не могла.
Решение. Назовём первую фигурку – лесенкой. Рассмотрим шахматную раскраску нашей доски в два цвета – чёрный и белый. Тогда клеток чёрного и белого цветов будет одинаковое количество. Заметим, что в каждом прямоугольнике 2×1

будет по одной чёрной и белой клетке. Это означает, что суммарно во всех лесенках количество клеток чёрного и белого цвета должно быть одинаковым. Но в каждой лесенке будет либо 4 белые и 2 черные клетки, либо 4 черные и 2 белые клетки. Пусть x – количество лесенок первого вида, а y – второго вида. Тогда суммарное количество белых клеток в лесенках равно $4x + 2y$, а чёрных – $2x + 4y$. Отсюда следует, что $4x + 2y = 2x + 4y$, т.е. $x = y$. Это означает, что общее количество лесенок $2x$ чётно и поэтому не может равняться 333.

5) Несколько команд провели турнир по гандболу – каждая команда сыграла с каждой по разу. За победу начислялось 2 очка, за ничью – 1 очко, за проигрыш очков не давалось. Если по итогам две команды набрали одинаковое число очков, более высокое место присуждалось команде, у которой больше разница между числом забитых и пропущенных мячей. Три первые команды набрали соответственно 7, 5 и 3 очков. Сколько очков набрала последняя команда?
Ответ. 2 очка.
Решение. Пусть в турнире участвовало n команд, тогда было разыграно $n(n-1)$ очков. Последние $n-2$ команды (т.е. все, кроме занявших первые два места) набрали не более чем по 3 очка каждая. Значит, $n(n-1) \le 7 + 5 + 3(n-2)$, откуда $n \le 5$. Победившая команда набрала 7 очков, поэтому она провела не меньше четырёх игр. Следовательно, всего было 5 команд, которые разыграли между собой $5 \cdot 4 = 20$ очков.
Пусть четвёртая (по итогам чемпионата) команда набрала x очков, а последня – y очков. Тогда общее число разыгранных очков равно $7 + 5 + 3 + x + y = 20$, откуда следует, что $x + y = 5$. Так как $y \le x \le 3$, получаем, что $x = 3, y = 2$. Значит, команда, занявшая последнее место, набрала 2 очка. Пример турнира, удовлетворяющего условию задачи, приведён в таблице.

Команда	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**	**Сумма**
1		2	2	2	1	7
2	0		2	1	2	5
3	0	0		1	2	3
4	0	1	1		1	3
5	1	0	0	1		2

Вариант 4

1. На доске нарисован прямоугольник. Известно, что если его ширину увеличить на 30%, а длину уменьшить на 20%, то его периметр останется неизменным. Как изменился бы периметр исходного прямоугольника, если его ширину уменьшили бы на 20%, а длину увеличили бы на 30%?
Ответ. Увеличится на 10%.
Решение. Обозначим ширину исходного прямоугольника a, а высоту b. В первом случае измененные ширина и длина будут $1{,}3a$ и $0{,}8b$ соответственно. По условию $2(a+b) = 2(1{,}3a + 0{,}8b)$, откуда $b = 1{,}5a$. Это значит, что исходный периметр равен $2(a + 1{,}5a) = 5a$. Во втором случае периметр будет $2(0{,}8a + 1{,}3b) = 2(0{,}8a + 1{,}3 \cdot 1{,}5a) = 5{,}5a$. Это число больше $5a$ на $0{,}5a$, то есть на 10%.

2. Квадратный трехчлен $x^2 + ux - v$ имеет различные ненулевые корни p и q, а квадратный трехчлен $x^2 + px - q$ – различные ненулевые корни u и v. Найдите всевозможные значения p, q, u и v.
Ответ. $p = -1, q = 2, u = -1, v = 2$.
Решение. Применив к обоим уравнениям теорему Виета, составим систему уравнений:

$$\begin{cases} p + q = -u, \\ u + v = -p, \\ pq = -v, \\ uv = -q. \end{cases}$$

Вычитая из первого уравнения второе, после сокращения получаем: $q = v$. Подставив q вместо v в третье и четвёртое уравнения и сократив на $q \neq 0$, получаем, что $p = u = -1$. Теперь из первых двух уравнений находи $q = v = 2$.

3. В трапеции $KLMN$ основание LM в два раза короче KN. Внутри трапеции отмечена такая точка O, что $KL = OL$. Докажите, что прямая, соединяющая точку M с серединой отрезка ON, перпендикулярна OK.
Решение. Пусть P – середина ON, Q – середина KO. Отрезок QP – средняя линия треугольника KON, поэтому $QP \parallel KN \parallel LM$ и $QP = \frac{1}{2}KN = LM$. Следовательно, $QLMP$ – параллелограмм и $LQ \parallel MP$. С другой стороны, отрезок LQ является медианой равнобедренного треугольника KLO, поэтому$LQ \perp KO$. Таким образом $MP \perp KO$.

4. Миша в течение недели каждый день срывал по яблоку и взвешивал его. Все яблоки весили по-разному, но вес каждого яблока был равен целому числу граммов и колебался от 221 грамма до 230 граммов (включительно). Миша также вычислял средний вес всех сорванных яблок, и он каждый раз был целым числом. Яблоко, сорванное в седьмой день, весило 225 граммов. Сколько весило яблоко, сорванное в шестой день?
Ответ. 230 граммов.
Решение. Каждое яблоко весило 220 граммов плюс целое число от 1 до 10. Из чисел от 1 до 10 надо выбрать 7 чисел, так, чтобы их сумма делилась на 7. Одно из этих чисел равно 5, из чисел 1, 2, 3, 4, 6, 7, 8, 9, 10 надо выбрать 6. Самая малая сумма шести из этих чисел равна 23, самая большая равна 44. Прибавляя 5, получаем числа от 28 до 49. В этом промежутке находится 4 числа, кратные 7: 28, 35, 42, 49. При этом сумма весов за первые 6 дней должна быть кратна 6. Из чисел 23, 30, 37, 44 этому условию удовлетворяет только число 30. Таким образом, общий вес за первые 6 дней был равен $220 \cdot 6 + 30$ (далее будем писать просто 30, а число, кратное 220, прибавим в конце). При этом сумма весов за первые 5 дней должна быть кратна 5. Возможный интервал за 5 дней: от 16 до 40, подходят числа 20, 25, 30, 40. Но общий вес за 5 дней меньше, чем за 6, поэтому он меньше 30, то есть 20 или 25. Однако разность между 30 и 25 равна 5, а число 5 уже использовано. Поэтому вес яблок за 5 дней равен $220 \cdot 5 + 20$, значит, яблоко, сорванное в 6-й день, весило $220 \cdot 6 + 30 - (220 \cdot 5 + 20) = 230$ граммов. Это значение допустимо, так как яблоки, сорванные за неделю, могли весить 221, 223, 222, 226, 228, 210, 205 граммов.

5. Несколько команд провели турнир по хоккею – каждая команда сыграла с каждой по разу. За победу начислялось 2 очка, за ничью – 1 очко, за проигрыш очков не давалось. Команда «Бельчата» одержала больше всех побед и набрала меньше всех очков. Какое наименьшее количество команд могло принимать участие в турнире?
Ответ. 6 команд.
Решение. В турнире из n команд «Бельчата» набрали меньше среднего количества, т. е. не больше $n - 2$ очков. Значит, какая-то команда набрала больше среднего, т. е. не меньше n очков. Для этого ей пришлось одержать хотя бы одну победу. Следовательно, «Бельчата» одержали не меньше двух побед, т. е. набрала не меньше 4 очков. Поэтому $n \geq 6$. Пример для шести команд см. в таблице.

Команда	1	2	3	4	5	Бельчата	Сумма
1		1	1	1	1	2	6
2	1		1	2	1	0	5
3	1	1		1	2	0	5
4	1	0	1		1	2	5
5	1	1	0	1		2	5
Бельчата	0	2	2	0	0		4