ОТВЕТЫ И РЕШЕНИЯ

7 КЛАСС

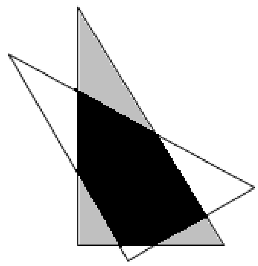
Общее количество баллов **100. Решение каждой задачи оценивается Жюри из20 баллов** в соответствии с разработанными критериями и методикой оценки:

Баллы	Правильность (ошибочность) решения
20	Полное (верное) решение.
16-20	Верное решение. Имеются небольшие недочёты, в целом не влияющие на решение.
12-16	Решение в целом верное. Однако оно содержит ряд ошибок, либо не рассмотрены отдельные случаи, но может стать правильным после небольших исправлений или дополнений.
8-12	Верно рассмотрен один из двух существенных случаев.
6-8	Доказаны вспомогательные утверждения, помогающие в решении задачи.
2-6	Рассмотрены частные случаи при отсутствии решения (или при ошибочном решении).
0-2	Решение начато, но продвижение незначительное.
0	Решение неверное, продвижения отсутствуют.
0	Решение отсутствует.

Указания к оцениванию отдельных задач содержатся в комментариях к решениям.

Вариант 1

1. Два одинаковых треугольника наложили друг на друга так, что в пересечении образовался шестиугольник (см. рисунок). Докажите, что площади серых и белых частей равны.



Решение. Площадь первого треугольника равна сумме площади чёрного шестиугольника и белых частей; площадь второго треугольника равна сумме площади чёрного шестиугольника и серых частей. Но площади треугольников равны.

Комментарий. *Верное решение – 20 баллов. Есть пробелы в обосновании – 15 баллов. Решение начато, есть некоторое продвижение – 5 баллов. Решение начато, но продвижение несущественно – 1 балл.*

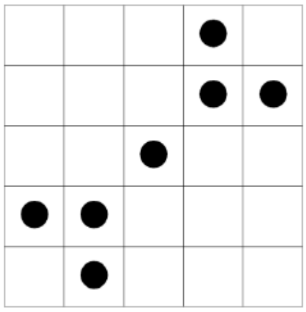
2. Бельчонок насушил грибов: 85% белых грибов, а остальные рыжики. Потом он съел часть белых грибов, теперь рыжики составляли 30% оставшихся грибов. Какую часть грибов съел бельчонок?

Ответ. $\frac{1}{2}$.

Решение. Рыжики составляли 15% грибов, потом процент рыжиков увеличился в 2 раза, значит, число грибов уменьшилось в 2 раза.

Комментарий. *Верное решение – 20 баллов. В верном решении допущена арифметическая ошибка – 15 баллов. Уравнение верно составлено, но не доведено до верного решения – 10 баллов. Решение начато, есть продвижение – 5 баллов. Решение начато, но продвижение несущественно – 1 балл.*

3. В некоторых 7 клетках таблицы 5×5 стоят кляксы. Если убрать любые две строки и любые два столбца, останется хотя бы одна клякса. Нарисуйте, как могут быть расположены кляксы.
Ответ. Например, так.



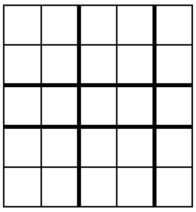
Комментарий. *Верный пример – 20 баллов.*

4. Сумма нескольких натуральных чисел равна 2022. Арина поделила каждое чётное число на два, а каждое нечётное умножила на три. Могла ли сумма чисел не измениться?
Ответ. Нет.
Решение. Пусть сумма чётных чисел равна A, а сумма нечётных чисел равна B. Тогда $A + B = \frac{A}{2} + 3B$, откуда $A = 4B$ и вся сумма равна $5B$. Но 2022 не делится на 5.
Комментарий. *Верное решение – 20 баллов. Есть пробелы в обосновании – 15 баллов. Уравнение верно составлено, но не решено верно – 10 баллов. Решение начато, есть некоторое продвижение – 5 баллов. Решение начато, но продвижение несущественно – 1 балл.*

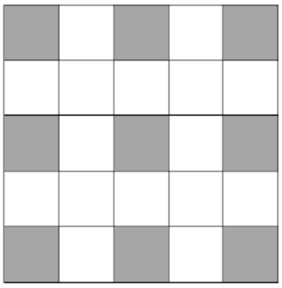
5. Вася сложил четыре числа попарно. Четыре наибольшие из шести полученных сумм равнялись $20, 16, 13, 9$. Найдите две оставшиеся суммы и определите, какие числа мог складывать Вася.
Ответ. Суммы равны 2 и 6. Числа: $-0{,}5$; $2{,}5$; $6{,}5$; $13{,}5$ или$-2{,}5$; $4{,}5$; $8{,}5$; $11{,}5$.
Решение.Обозначим числа a, b, c, d; Пусть $a \le b \le c \le d$. Самая большая сумма получается при складывании dи c, следующая по величине – при складывании dи b. То есть $d + c = 20$, $d + b = 16$. Дальше возможны варианты. 1) $d + a = 13$, $c + b = 9$ или 2) $d + a = 9$, $c + b = 13$.
В варианте 1) $c = 20 - d$, $b = 16 - d$, $c + b = 20 - d + 16 - d = 9$, откуда $d = 13{,}5$.Тогда $c = 20 - 13{,}5 = 6{,}5$, $b = 16 - 13{,}5 = 2{,}5$, $a = 13 - 13{,}5 = -0{,}5$.Оставшиеся суммы равны $a + b$ =2 и $a + c = 6$.
В варианте 2)$c = 20 - d, b = 16 - d, c + b = 20\ d + 16 - d = 13$,откуда $d = 11{,}5$. Тогда $c = 20 - 11{,}5 = 8{,}5$, $b = 16 - 11{,}5 = 4{,}5$, $a = 9 - 11{,}5 = -2{,}5$.Оставшиеся суммы равны $a + b = 2$ и $a + c = 6$.
Комментарий. *Верное решение – 20 баллов. Баллы за верное решение распределяются так: найден только один набор чисел – 9 баллов, найден второй набор – 10 баллов, найдены суммы – 1 балл, эти баллы суммируются. Решение начато, есть некоторое продвижение – 5 баллов. Решение начато, но продвижение несущественно – 1 балл. Только ответ без решения – 1 балл.*

Вариант 2

1. В квадрате 5×5 закрасьте как можно больше клеток чёрным, чтобы выполнялось условие: любой отрезок, соединяющий две чёрные клетки, обязательно проходит и через белую клетку.
Ответ. Докажем, что нельзя закрасить больше 9 клеток. Разобьем квадрат на 9 частей:



В каждой части нельзя закрасить больше одной клетки.
9 клеток можно закрасить так:



Комментарий. *Верное решение, включающее обоснование того, что число закрашенных клеток максимально, и рисунок – 20 баллов. Неполное обоснование того, что число закрашенных клеток максимально – 15 баллов. Только ответ в виде рисунка – 10 баллов. Решение начато, но продвижение несущественно – 1 балл.*

2.У бельчонка был запас кедровых и еловых шишек, кедровые составляли 60%. В августе он набрал ещё еловых шишек, теперь кедровые составляли 20%. В сентябре бельчонок набрал ещё кедровых шишек, теперь кедровые шишки составляли 80%. Во сколько раз увеличилось общее число шишек за два месяца?

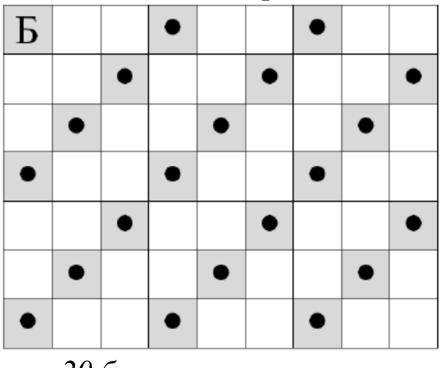
Ответ.12.

Решение. В августе процент кедровых шишек уменьшился в 3 раза, значит, общее число шишек увеличилось в 3 раза. В сентябре процент еловых шишек уменьшился с 80% до 20%, значит, общее число шишек увеличилось в 4 раза. Всего за два месяца общее число шишек увеличилось в $3 \cdot 4 = 12$ раз.

Комментарий. *Верное решение – 20 баллов. В обосновании есть пробелы – 15 баллов. В верном решении допущена арифметическая ошибка – 15 баллов. Уравнение верно составлено, но не доведено до верного решения – 10 баллов. Решение начато, есть продвижение – 5 баллов. Решение начато, но продвижение несущественно – 1 балл.*

3. В прямоугольнике размером 7×9 клеток в некоторых клетках сидит по одному бельчонку так, чтобы в каждом прямоугольнике 2×3 (или 3×2) сидит ровно 2 бельчонка. Нарисуйте, как они могут сидеть.

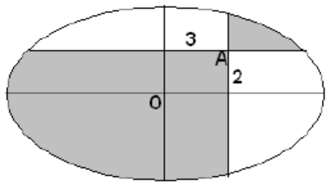
Ответ. Например, так (21 бельчонок сидит в закрашенных клетках).



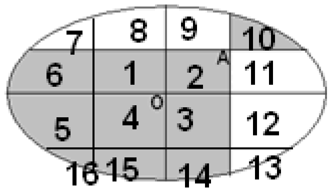
Комментарий. *Верный пример – 20 баллов.*

4. Подберите к числу 34 ещё пять натуральных чисел так, чтобы выполнялись два условия:
(1) среди шести чисел нет трёх чисел, имеющих общий делитель (больше единицы);
(2) среди любых трёх чисел из этих шести найдутся два числа, имеющие общий делитель (больше единицы).
Ответ. Например, $6, 34, 35, 51, 55, 77$.
Решение. Поскольку $34 = 2 \cdot 17$, возьмем простое число 3 и добавим числа $2 \cdot 3 = 6$ и $17 \cdot 3 = 51$. Числа $6, 34, 51$ удовлетворяют условиям. Построим еще одну тройку, чисел, используя простые числа $5, 7, 11$, получим числа $35, 55, 77$. Эти числа также удовлетворяют условиям. Объединим тройки чисел, условие (1) выполняется. При выборе трёх чисел хотя бы два числа будут из одной тройки, поэтому у них есть общий делитель, то есть условие (2) тоже выполняется.
Комментарий. *Верное решение – 20 баллов. В верном решении допущена арифметическая ошибка – 15 баллов. Только верный ответ без объяснений – 1 балл. Решение начато, но допущены принципиальные ошибки – 1 балл.*

5. Миша хотел разрезать торт по осям симметрии (см. рисунок), но промахнулся, и провёл разрезы не через точку O, а через точку A, отстоящую от осей симметрии на 2 и на 3 сантиметра. На сколько площадь кусков, закрашенных серым, больше площади незакрашенных кусков?



Ответ. 24 см^2.
Решение. Проведём вертикальную и горизонтальные прямые симметрично имеющимся прямым относительно центра O. Торт разобьётся на 16 кусков; пронумеруем их, как на рисунке. Площадь закрашенной области равна сумме площадей областей $1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6 + 10 + 14 + 15 + 16$. Площадь белой области равна сумме площадей областей $7 + 8 + 9 + 11 + 12 + 13$. По симметрии, площади некоторых областей равны: $1 = 2 = 3 = 4, 5 = 6 = 11 = 12, 7 = 10 = 13 = 16, 8 = 9 = 14 = 15$. Разность площадей закрашенной и белой областей равна $1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6 + 10 + 14 + 15 + 16 - (7 + 8 + 9 + 11 + 12 + 13) = 1 + 2 + 3 + 4 = 4 \cdot 6 = 24$ см^2.



Комментарий. *Верное решение – 20 баллов. В обосновании есть пробелы – 15 баллов. Задача решена для прямоугольника – 15 баллов. В верном решении допущена арифметическая ошибка – 15 баллов. Решение начато, есть продвижение – 5 баллов. Решение начато, но продвижение несущественно – 1 балл.*

Вариант 3

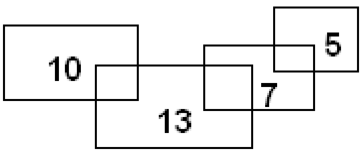
1. После того, как вытянули репку, осталась куча земли. Дедка убрал половину кучи, Бабка убрала треть оставшейся земли, Внучка – четверть остатка, Жучка – пятую часть остатка, Кошка – шестую часть, Мышка – седьмую. Какая часть кучи осталась?
Ответ. $\frac{1}{7}$.
Решение. Сначала осталась половина кучи, потом $\frac{2}{3}$ остатка, потом $\frac{3}{4}$ нового остатка, и так далее. В конце осталась $1 \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{3}{4} \cdot \frac{4}{5} \cdot \frac{5}{6} \cdot \frac{6}{7} = \frac{1}{7}$ часть первоначальной кучи.

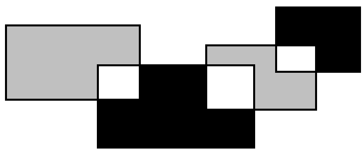
Комментарий. *Верное решение – 20 баллов. Решение начато, есть некоторое продвижение – 5 баллов. Решение начато, но заметного продвижения нет – 1 балл. Дан верный ответ без объяснений – 0 баллов.*

2. Диана написала двузначное число, и приписала к нему двузначное число, которое получилось перестановкой цифр первого числа. Оказалось, что разность между первым и вторым числом равна сумме цифр первого числа. Какое четырехзначное число написано?
Ответ. 5445.
Решение. Разность между такими числами всегда делится на 9, так как $10a + b - (10b + a) = 9(a + b)$. Эта разность равна сумме двух цифр, поэтому она не больше 18. Но она не может равняться 18, так тогда и первое, и второе число равнялось бы 99. Поэтому разность двух чисел равна 9, и число десятков двух чисел отличается не больше, чем на 1. Но сумма цифр десятков двух чисел – это сумма цифр первого числа, и она равна 9. Очевидно, подходят только цифры 4 и 5.
Комментарий. *Верное решение – 20 баллов. Доказательство неполное – 10 баллов. Задача решена подбором, не доказано, что других вариантов нет – 5 баллов. В ответе есть и число* 4554 – снимается 1 балл. *Решение начато, есть некоторое продвижение – 5 баллов. Решение начато, но заметного продвижения нет – 1 балл. Дан верный ответ без объяснений – 0 баллов.*

3. На детский праздник приготовили пирожные: 10 эклеров, 20 корзиночек, 30 шоколадных брауни, 40 трубочек. Какое наибольшее число детей сможет взять три разных пирожных?
Ответ. 30.
Решение. Из эклеров, корзиночек и брауни надо взять хотя бы 2 пирожных, а их всего вместе 60, то есть не больше 30 детей смогут взять три разных пирожных. Они могут сделать это так: 10 детей возьмут эклер, брауни и трубочку, 20 детей возьмут корзиночку, брауни и трубочку.
Комментарий. *Верное решение – 20 баллов. Доказательство, что 30 – наибольшее значение – 10 баллов, пример – 10 баллов. Если доказательство недостаточно обосновано, то снимается 5 баллов. Решение начато, есть некоторое продвижение – 5 баллов. Решение начато, но заметного продвижения нет – 1 балла. Дан верный ответ без объяснений – 0 баллов.*

4. Четыре прямоугольника имеют площади, показанные на рисунке. Какая площадь больше, серая или чёрная, и на сколько?





Ответ. Чёрная площадь больше на 1.
Решение. Пусть белые площади равны a, b, c (слева направо). Тогда суммарная серая площадь равна $10 - a + 7 - b - c$, а суммарная чёрная площадь равна $13 - a - b + 5 - c$. Разность между ними равна $13 - a - b + 5 - c - (10 - a + 7 - b - c) = 1$. Суммарная чёрная площадь больше на 1.
Комментарий. *Верное решение – 20 баллов. Обоснование неполное – 10 баллов. Только ответ без обоснования – 0 баллов.*

5. На 900 карточках записаны все натуральные числа от 1 до 900. Карточки, на которых записаны квадраты целых чисел, убирают, а оставшиеся перенумеровывают, начиная с 1.

Потом операцию удаления квадратов повторяют. Сколько раз придётся повторить эту операцию, чтобы удалить все карточки?
Ответ. 59.
Решение. При первой операции удалится 30 карточек, останется $900 - 30 = 30 \cdot 29$ карточек. Поскольку $30 \cdot 29 > 29^2$, все квадраты, кроме 30^2, остались. При второй операции удалится 29 карточек. Останется $30 \cdot 29 - 29 = 29^2$карточек. Таким образом, за две операции перешли от числа 30^2 к числу 29^2. Запишем в общем виде: при первой операции удалится n карточек, останется $n^2 - n = n(n-1) > (n-1)^2$, при второй операции удалится $n-1$ карточка. Останется $n^2 - n - (n-1) = (n-1)^2$, то есть за две операции всегда переходят от числа n^2 к числу $(n-1)^2$. Всего среди чисел от 1 до 900 содержится 30 квадратов, между ними 29 переходов. Чтобы дойти до единственной карточки потребуется $2 \cdot 29$ операций, и ещё одна, чтобы удалить последнюю карточку с номером 1.
Комментарий. *Верное решение – 20 баллов. В обосновании есть пробелы – 15 баллов. Ошибки в подсчете числа вариантов при верной идее решения – снимается 5 баллов. Решение начато, есть некоторое продвижение – 5 баллов. Решение начато, но заметного продвижения нет – 1 балла. Дан верный ответ без объяснений – 0 баллов.*

Вариант 4

1. Андрей и Коля не ровесники, но в декабре прошлого года каждому из них исполнилось столько лет, какова сумма цифр его года рождения. Сколько лет им сейчас?
Ответ.7 и 25.
Решение.
Обозначим год рождения $\overline{abcd}$, тогда $2021 - \overline{abcd} = a + b + c + d$, или $1001a + 101b + 11c + 2d = 2021$. При $a = 2$ получаем $101b + 11c + 2d = 19$, то есть $b = 0$, $11c + 2d = 19$. Цифра c должна быть нечётной и не больше 1, то есть $c = 1$, тогда $d = 4$, $\overline{abcd} = 2014$.
При $a = 1$ получаем $101b + 11c + 2d = 1020$, $11c + 2d \leq 99 + 18 = 117$, то есть $101b \geq 903$, откуда $b = 9$, $11c + 2d = 111$. При этом $11c \geq 93$, значит, $d = 9$. Тогда $d = 6$, $\overline{abcd} = 1996$.
Проверка. 1) $2021 - 2014 = 7$, сумма цифр числа 2014 равна 7. 2) $2021 - 1996 = 25$, сумма цифр числа 1996 равна 25.
Комментарий. *Верное решение – 20 баллов. Баллы распределяются так: найден только один ответ – 7 баллов, найден второй ответ – 7 баллов, доказано, что других решений нет – 6 баллов, эти баллы суммируются. Решение начато, есть некоторое продвижение – 5 баллов. Решение начато, но продвижение несущественно – 1 балл. Только ответ без решения – 1 балл.*

2. Тетрадка стоит 10 рублей. Восемь детей купили тетрадки, у каждого осталось разное количество рублей (не нулевое), но ни у кого не хватало на ещё одну тетрадку. Дети сложили оставшиеся рубли, и их хватило в точности ещё на несколько тетрадок. Сколько денег оставалось у каждого из детей до складывания?
Ответ. 1, 2, 3, 4, 6, 7, 8, 9.
Решение. Возьмём все возможные ненулевые остатки при делении на 10: 1, 2, ..., 9. Сумма всех 9 остатков равна 45. Надо исключить один остаток так, чтобы сумма оставшихся была кратна 10. Очевидно, есть только одна возможность: исключить остаток 5.
Комментарий. *Верное решение – 20 баллов. В обосновании есть пробелы – 15 баллов. Решение начато, есть некоторое продвижение – 5 баллов. Решение начато, но заметного продвижения нет – 1 балл. Дан верный ответ без объяснений – 0 баллов.*

3. Найдите всевозможные значения периметра прямоугольника, если известно, что его можно разрезать на три прямоугольника, периметр каждого из которых равен 10, а длины сторон – целые числа.

Ответ. $14, 16, 18, 22$ или 26.

Решение. Возможны два вида разрезания.

1) Линии разреза параллельны. Обозначим через x длину стороны одного из прямоугольников разбиения, тогда несложно выразить остальные стороны. В этом случае $1 \leq x \leq 4$, поэтому периметр исходного прямоугольника равен $2(2x + 5) = 14$, 18, 22 или 26.

2) Линии разреза перпендикулярны. Аналогично, обозначив через x длину стороны одного из прямоугольников, найдем длины остальных сторон. Тогда $1 \leq x \leq 2$, поэтому периметр исходного прямоугольника равен $2(10 - x) = 16$ или 18.

Комментарий. *По 4 балла за каждый верный ответ.*

4. Бельчата Пушистик и Лохматик съели корзину ягод и пакет семечек, в котором было больше 50, но меньше 65 семечек, начав и закончив одновременно. Сначала Пушистик ел ягоды, а Лохматик – семечки, потом (в какой-то момент) они поменялись. Лохматик ел ягоды в шесть раз быстрее Пушистика, а семечки – только в три раза быстрее. Сколько семечек съел Лохматик, если ягод Лохматик съел в два раза больше Пушистика?

Ответ. 54.

Решение. Разделим ягоды на 3 равные части. Каждую часть Лохматик ел в 6 раз быстрее Пушистика, но частей две, значит он затратил на ягоды только в 3 раза меньше времени чем Пушистик. Значит, Пушистик ел семечки втрое меньше времени, чем Лохматик. Поскольку Пушистик ест втрое медленнее, то он съел семечек в 9 раз меньше Лохматика. Разделив семечки в отношении $9:1$, видим, что Пушистику досталась 10-я часть, отсюда нетрудно понять, что в пакете было 60 семечек. Поэтому Пушистик съел 6 семечек, а Лохматик – 54.

Комментарий. *Верное решение – 20 баллов. Решение начато, есть некоторое продвижение – 5 баллов. Решение начато, но заметного продвижения нет – 1 балл. Решение неверно или отсутствует – 0 баллов.*

5. Из шести неразличимых на вид орехов два искусственных (настоящие орехи весят одинаково, искусственные орехи тоже одинаково и легче настоящих). Есть чашечные весы, за каждое взвешивание на которых надо отдать один орех. Если отданный орех настоящий, весы показывают правильный результат, а если искусственный – могут показать всё, что угодно. Как найти (и не отдать) один настоящий орех?

Решение. Пронумеруем орехи числами от 1 до 6. Положим на одну чашу весов 1-й и 2-й орехи, на другую – 3-й и 4-й и сравним их, отдав 6-й орех. Возможны два исхода:

1) весы оказались в равновесии;

2) одна из чаш, например, с 1-м и 2-м орехами, перевесила.

В любом случае среди 1-го, 2-го и 5-го орехов не более одного искусственного. Действительно, если 6-й орех искусственный, то в любой тройке орехов, не содержащей его, не более одного искусственного. А если 6-й орех настоящий, то в первом случае на каждой чаше было по одному настоящему и одному искусственному ореху, а во втором случае 1-й и 2-й орехи настоящие. Сравним теперь 1-й и 2-й орехи, отдав 5-й. В случае равенства оба ореха на весах настоящие, а если перевесила одна из чаш, то на ней настоящий орех.

Комментарий. *Верное решение – 20 баллов. В обосновании есть пробелы – 15 баллов. Решение начато, есть некоторое продвижение – 5 баллов. Решение начато, но заметного продвижения нет – 1 балла. Дан верный ответ без объяснений – 0 баллов.*