ОТВЕТЫ И РЕШЕНИЯ

6 КЛАСС

Общее количество баллов **100. Решение каждой задачи оценивается Жюри из 20 баллов** в соответствии с разработанными критериями и методикой оценки:

Баллы	Правильность (ошибочность) решения
20	Полное (верное) решение.
16-20	Верное решение. Имеются небольшие недочёты, в целом не влияющие на решение.
12-16	Решение в целом верное. Однако оно содержит ряд ошибок, либо не рассмотрены отдельные случаи, но может стать правильным после небольших исправлений или дополнений.
8-12	Верно рассмотрен один из двух существенных случаев.
6-8	Доказаны вспомогательные утверждения, помогающие в решении задачи.
2-6	Рассмотрены частные случаи при отсутствии решения (или при ошибочном решении).
0-2	Решение начато, но продвижение незначительное.
0	Решение неверное, продвижения отсутствуют.
0	Решение отсутствует.

Вариант 1

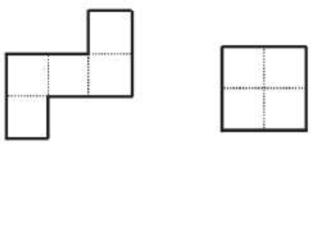
1) Найдите три решения ребуса $\text{МА} = \text{Р} \times \text{К} = \text{Е} + \text{Р}$, в котором буквы заменены цифрами так, чтобы равенства стали верными (одинаковыми буквами обозначены одинаковые цифры, разными буквами – разные цифры).

Ответ. 1) $10 = 2 \times 5 = 8 + 2$, 2) $12 = 3 \times 4 = 9 + 3$, 3) $12 = 4 \times 3 = 8 + 4$.

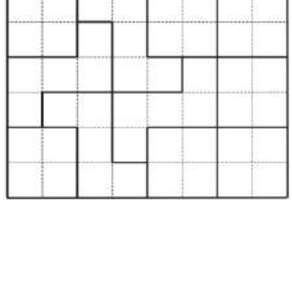
2) У Волка в наборе имеются гирьки массами 90 г, 91 г, 92 г ..., 100 г. Заяц положил на одну чашу весов гирьку массой 121 г. Может ли Волк уравновесить чаши весов, используя несколько гирь из своего набора?

Решение. Заметим, что $121 = 100 + 9 + 7 + 5 = 100 + (99 - 90) + (98 - 91) + (97 - 92)$. Тогда один из вариантов уравновесить: $121 + 90 + 91 + 92 = 100 + 99 + 98 + 97$.

3) Заполните квадрат размером 8×8 фигурками, изображенными на рисунке, так, чтобы были использованы только фигурки каждого из указанных видов. Фигурки можно поворачивать и переворачивать. Накладывать фигурки друг на друга нельзя.



Решение.



4) Сколькими способами можно переставить буквы слова «ВЕКТОР» так, чтобы в нём гласные не стояли рядом и согласные тоже не стояли рядом?
Ответ. 0 способов.
Решение. Будем выставлять буквы слева по порядку. На первое место можно поставить любую букву. Поставим гласную (2 варианта), тогда на второе место идёт согласная (4 варианта), на третье – оставшаяся гласная (1 вариант), затем – любая из оставшихся согласных (3 варианта), дальше гласная, но вариантов выбрать гласную больше не осталось. Получаем, что таких расстановок нет. Также невозможен и случай, если на первое место поставить согласную.

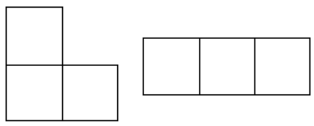
5) В некотором уезде живут купцы и разбойники. Купцы всегда говорят правду, а разбойники всегда лгут. Однажды за круглым столом собралась компания из 10 жителей, причем известно, что среди них есть хотя бы один разбойник и хотя бы один купец. Какое наибольшее количество из сидящих за столом может сказать: «Один из моих соседей разбойник, а другой – купец»?
Ответ. 9.
Решение. Предположим, что все сидящие за столом смогли сказать такую фразу. Тогда рядом с разбойником должны сидеть либо два разбойника, либо два купца. Но если рядом с каким-то разбойником будет сидеть два разбойника, то с его соседом-разбойником также рядом должны сидеть два разбойника. Продолжая рассуждать аналогично, получим, что все сидящие за столом разбойники; по условию это невозможно. Значит, рядом с каждым разбойником должны сидеть два купца. А рядом с каждым купцом должны сидеть один разбойник и один купец. Таким образом, рассадка за столом восстанавливается однозначно: ... $-$ Р $-$ К $-$ К $-$ Р $-$ К $-$ К $- \cdots$. Но тогда число сидящих за столом должно делиться на 3, а 10 на 3 не делится. Поэтому все 10 человек не смогли сказать требуемую фразу. Покажем, что 9 из 10 сидящих за столом могли сказать требуемую фразу. Это могло произойти, если люди за столом сидят следующим образом: $-$Р $-$ К $-$ К $-$ Р $-$ К $-$ $\breve{\text{К}}$ $-$ К $-$ Р $-$ К $-$ К $-$. Среди них только купец $\breve{\text{К}}$ не мог сказать требуемую фразу.

Вариант 2

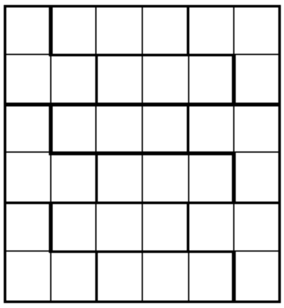
1) Найдите три решения ребуса $\text{КА} = \text{Р} \times \text{Ь} = \text{Е} + \text{Р}$**,** в котором буквы заменены цифрами так, чтобы равенства стали верными (одинаковыми буквами обозначены одинаковые цифры, разными буквами – разные цифры).
Ответ. 1) $10 = 2 \times 5 = 8 + 2$, 2) $12 = 3 \times 4 = 9 + 3$, 3) $12 = 4 \times 3 = 8 + 4$.

2) У Волка в наборе имеются гирьки массами 90 г, 91 г, 92 г ..., 100 г. Заяц положил на одну чашу весов гирьку массой 115 г. Может ли Волк уравновесить чаши весов, используя несколько гирь из своего набора?
Решение. Заметим, что $115 = 100 + 7 + 5 + 3 = 100 + (98 - 91) + (97 - 92) + (96 - 93)$. Тогда один из вариантов уравновесить: $115 + 91 + 92 + 93 = 100 + 98 + 97 + 96$.

3) Заполните квадрат размером 6×6 фигурками, изображенными на рисунке, так, чтобы каждая фигурка граничила (имела общий отрезок) с фигурками обоих типов. Фигурки можно поворачивать и переворачивать. Накладывать фигурки друг на друга нельзя.



Решение.



4) Сколькими способами можно переставить буквы слова «ТЕРМИН» так, чтобы в нём гласные не стояли рядом и согласные тоже не стояли рядом?
Ответ. 0 способов.
Решение. Будем выставлять буквы слева по порядку. На первое место можно поставить любую букву. Поставим гласную (2 варианта), тогда на второе место идёт согласная (4 варианта), на третье – оставшаяся гласная (1 вариант), затем – любая из оставшихся согласных (3 варианта), дальше гласная, но вариантов выбрать гласную больше не осталось. Получаем, что таких расстановок нет. Также невозможен и случай, если на первое место поставить согласную.

5) В некотором уезде живут купцы и разбойники. Купцы всегда говорят правду, а разбойники всегда лгут. Однажды за круглым столом собралась компания из 12 жителей, каждый из них сказал: «Среди моих соседей есть разбойник». Какое наибольшее число из сидящих за столом может сказать: «Среди моих соседей есть купец»?
Ответ. 8.
Решение. Заметим, что два разбойника не могут сидеть рядом (иначе каждый из них сказал бы правду). Значит, никакой разбойник не может сказать вторую фразу. С другой стороны, три купца также не могут сидеть рядом (иначе средний солгал бы, говоря, что у него есть сосед-разбойник). Значит, среди любых трех сидящих подряд есть разбойник, т.е. не более двух из них могут сказать вторую фразу. Разбивая сидящих на четыре тройки сидящих подряд, получаем, что не более $4 \cdot 2 = 8$ человек могли сказать вторую фразу. Ровно 8 (купцов) из сидящих за столом могли сказать требуемую фразу, если за столом люди сидят в таком порядке: РККРККРККРКК.

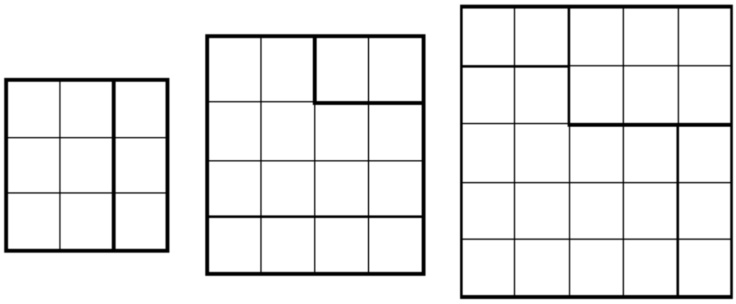
Вариант 3

1) Найдите три решения ребуса $** + ** = 17*$, в котором звёздочки заменены цифрами так, чтобы равенство стало верным и все семь цифр различные.
Ответ. 1) $82 + 93 = 175$, 2) $82 + 94 = 176$, 3) $84 + 92 = 176$.

2) На доске подряд записаны все целые числа от 1 до 20. Заяц посчитал сумму всех этих чисел, получил число 210 и заметил, что оно делится на 1, 2, 3, 5, 6, 7. Может ли Волк стереть с доски не более шести чисел так, чтобы новая сумма делилась на 1, 2, 3, 4, 5, 6?
Ответ. Вариантов несколько. Например, если стереть $11, 12, 13, 17, 18, 19$.
Решение. Число, меньшее 210, должно делиться на $1, 2, 3, 4, 5, 6$, т.е. быть кратным 60, значит, это только 60, 120 и 180. Получить 60, удалив не более 6 слагаемых нельзя, а 120 и 180 можно. В первом случае необходимо удалить числа, суммарное значение которых равно $210 - 120 = 90$. Например, 6 чисел: 11 и 19, 12 и 18, 13 и 17. Во втором случае удаляются те числа, которые в сумме дают $210 - 180 = 30$. Например, 20 и 10.

3) Даны два квадрата 3×3 и 4×4. Как разрезать каждый из них на две части так, чтобы из получившихся четырёх частей можно было сложить квадрат?

Решение.



4) Кузнечик прыгает по числовой прямой вправо на 2 или на 3. Ему запрещено попадать на простые числа. Сколькими способами он может попасть с 1 на 36? *Простое число – это натуральное число больше* 1*, у которого есть всего два делителя: единица и само число.*

Ответ. 48 способов.

Решение. Есть пять «обязательных» чисел: 4, 6, 12, 18, 30 – и четыре неоднозначных участка: $6-12$, $12-18$, $18-30$ и $30-36$. Каждый участник, кроме $18-30$, проходится двум способами (3 прыжка по 2 или 2 прыжка по 3). Длинный участок $18-30$ хочется разбить на 2 коротких. У нас нет числа в промежутке, на которое кузнечик обязательно наступит. Однако, перепрыгнув через простое число 23, кузнечик наступит либо на 24, либо на 25. На оба числа в одном способе он наступить не может, поэтому либо будет пара участков $18-24$, $24-30$, либо пара $18-25$, $25-30$. Каждый из участков $18-24$ и $24-30$ проходится двумя способами, $18-25$ единственным способом $18-20-22-25$, а $25-30$ двумя способами ($25-27-30$ и $25-28-30$). Поэтому участок $18-30$ проходится $2\cdot 2+1\cdot 2=6$ способами, а весь маршрут – $2\cdot 2\cdot 6\cdot 2=48$ способов.

5) В некотором уезде живут купцы и разбойники. Купцы всегда говорят правду, а разбойники всегда лгут. Однажды за круглым столом собралась компания из 25 жителей, каждый из них сказал: «У меня есть сосед разбойник». Какое наименьшее число разбойников может быть среди этих 25 жителей?

Ответ. 9.

Решение. Заметим, что три купца не могут сидеть рядом, так как в этом случае средний купец соглал бы. Значит, среди любых трёх сидящих подряд человек есть разбойник. Возьмем какого-нибудь разбойника, а остальных 24 человек разобъем на 24 тройки сидящих рядом. Так как в каждой тройке есть хотя бы один разбойник, общее число разбойников в круге не меньше 1+8=9. Ровно 9 разбойников могут сидеть, например, так:

$$-\text{Р}(\text{КРК})(\text{КРК})\ldots(\text{КРК})-.$$

Вариант 4

1. В некоторый день в мешке было несколько орехов. На следующий день в этот мешок добавили столько же орехов, сколько там было, но восемь орехов забрали. На третий день снова добавили столько же орехов, сколько там уже стало, но восемь забрали. То же самое произошло и в четвертый день, и после этого в мешке орехов не осталось. Сколько орехов было в мешке в самом начале?

Ответ. 7 орехов.

Решение. В начале четвертого дня в мешке было $(0+8):2=4$ ореха. Значит, в начале третьего дня их было $(4+8):2=6$, а в самом начале – $(6+8):2=7$.

2. Поставьте вместо точек (•) числа 6, 7, 8, 9, 52, 100 (надо использовать все числа), а вместо звёздочек (*) какие-нибудь знаки арифметических операций из набора (+, −, ×, :) так, чтобы получилось верное равенство

$$\bullet * \bullet * \bullet * \bullet * \bullet * \bullet = 623.$$

Если потребуется, можно расставить скобки.

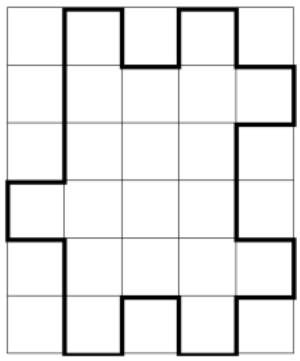
Ответ. Например, так: $(100 - 6) \times 7 - 52 + 8 + 9 = 623$.

3. Все 10 гантелей веса 4, 5, 6, 9, 10, 11, 14, 19, 23, 24 килограммов необходимо разложить на три стойки так, чтобы вес гантелей на первой стойке был в два раза меньше, чем вес гантелей на второй стойке. А вес гантелей на второй стойке в два раза меньше, чем вес гантелей на третьей стойке. Можно ли это сделать?

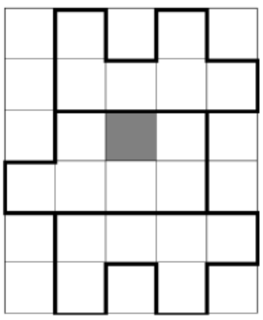
Ответ. Нельзя.

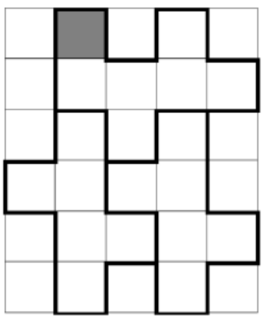
Решение. Предположим, нам удалось решить задачу. Тогда, если общий вес гантелей на первой стойке равен N кг, то общий вес гантелей на второй стойке будет $2N$ кг, а на третьей стойке — еще вдвое больше, то есть, $4N$ кг. Тогда общий вес всех гантелей должен равняться $N + 2N + 4N = 7N$ кг. С другой стороны, общий вес всех гантелей равен 4 + 5 + 6 + 9 + 10 + 11 + 14 + 19 + 23 + 24 = 125 кг. Это число не делится на 7, следовательно, это сделать нельзя.

4. Из фигуры, изображенной на рисунке, необходимо убрать одну клетку так, чтобы получившуюся фигуру можно было разрезать на три равные части. Части считаются равными, если их можно точно совместить при наложении друг на друга, при этом их можно переворачивать и поворачивать. Приведите два примера, где убираются разные клетки.



Решение.





5. Шестиклассники обсуждали, сколько лет их директору. Аня сказала: «Ему больше 38 лет». Боря сказал: «Ему меньше 35 лет». Вова: «Ему меньше 40 лет». Галя: «Ему больше 40 лет». Дима: «Боря и Вова правы». Саша: «Вы все ошибаетесь». Оказалось, что мальчики и девочки ошиблись одинаковое количество раз. Можно ли узнать, сколько лет директору?

Решение. Заметим, что Аня и Вова не могут ошибаться одновременно, поэтому Саша ошибается. Также ошибается хотя бы один из пары «Аня-Боря» и хотя бы один из пары «Вова-Галя». Таким образом, ошибившихся не меньше трёх, а в силу чётности их ровно четверо: два мальчика и две девочки. Значит, правы не больше одной девочки и не больше двух мальчиков. Дима фактически подтверждает слова Бори. Однако Боря, Дима и Вова не могут быть правы одновременно, поэтому Боря и Дима ошибаются и из мальчиков прав только Вова, а из девочек – только Аня. Отсюда следует, что директору 39 лет.