ОТВЕТЫ И РЕШЕНИЯ

11 КЛАСС

Общее количество баллов **100. Решение каждой задачи оценивается Жюри из20 баллов** в соответствии с разработанными критериями и методикой оценки:

Баллы	Правильность (ошибочность) решения
20	Полное (верное) решение.
16-20	Верное решение. Имеются небольшие недочёты, в целом не влияющие на решение.
12-16	Решение в целом верное. Однако оно содержит ряд ошибок, либо не рассмотрены отдельные случаи, но может стать правильным после небольших исправлений или дополнений.
8-12	Верно рассмотрен один из двух существенных случаев.
6-8	Доказаны вспомогательные утверждения, помогающие в решении задачи.
2-6	Рассмотрены частные случаи при отсутствии решения (или при ошибочном решении).
0-2	Решение начато, но продвижение незначительное.
0	Решение неверное, продвижения отсутствуют.
0	Решение отсутствует.

Указания к оцениванию отдельных задач содержатся в комментариях к решениям.

Вариант 1

1. Борис раскладывает 8 белых и 8 чёрных шариков по двум коробкам. Настя наугад выбирает коробку, а потом не глядя берёт из неё шарик. Может ли Борис так разложить шарики по двум коробкам, чтобы вероятность вынуть белый шарик была больше $\frac{2}{3}$?

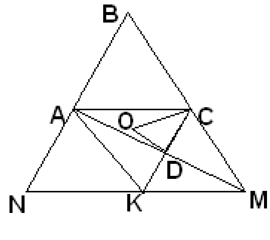
Ответ. Да.

Решение. Борис положит в первую коробку 1 белый шарик, а во вторую все остальные. Тогда вероятность вынуть белый шарик равна $\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\cdot\frac{7}{15}=\frac{22}{30}>\frac{2}{3}$.

Комментарий. *Верное решение – 20 баллов. В верном решении допущены арифметические ошибки – 15 баллов. Рассмотрен частный случай, когда шарики раскладывают поровну – 5 баллов. Решение начато, но продвижение несущественно – 1 балл. Только верный ответ без решения – 0 баллов.*

2. На продолжении за точку C стороны BC равностороннего треугольника ABC выбрана точка M, через неё проведена прямая, параллельная AC. Эта прямая пересекает продолжение стороны AB в точке N. Медианы треугольника BNM пересекаются в точке O. Точка D – середина AM. Найдите углы треугольника ODC.

Ответ. $30°, 60°, 90°$.



Решение. Возьмём на NM такую точку K, что $AK \parallel CM$, тогда $ACMK$ – параллелограмм. Докажем, что треугольники KON и COMравны по двум сторонам и углу между ними. В треугольнике AKN угол N равен $60°, AK \parallel BC$, то есть треугольник AKN равносторонний, отсюда $NK = NA = MC$. Точка O лежит на оси

рии правильного треугольника NBM, поэтому $NO = OM$. Медианы в правильном треугольнике являются биссектрисами, поэтому $\angle KNO = \angle CMO = 30°$.
Из равенства треугольников KON и COM следует, что $OK = OC$ и треугольник OKC равнобедренный. Диагонали параллелограмма делятся точкой пересечения пополам, по условию точка D – середина AM, значит, OD – медиана равнобедренного треугольника OKC, то есть является и высотой. Таким образом, $\angle ODC = 90°$.Поскольку OD – биссектриса $\angle KOC$,$\angle DOC = 1/2\,\angle KOC$. Но $\angle KOC = \angle KOM + \angle MOC$. При этом $\angle MOC = \angle KON$, поэтому $\angle KOC = \angle KOM + \angle KON = \angle NOM = 120°$, так как это угол между медианами правильного треугольника. Тогда $\angle DOC = 1/2\,\angle KOC = 60°$.
Комментарий. *Верное решение – 20 баллов. В верном решении есть вычислительные ошибки – 15 баллов. Рассмотрен частный случай – 5 баллов. Решение начато, есть продвижение – 5 баллов. Решение начато, но продвижение несущественно – 1 балл. Только верный ответ без решения – 0 баллов.*

3. На отрезке $[2; 5]$ выбрали три разные точки, для каждой точки перемножили расстояния до двух других точек, получили положительные числа a, b, c. Докажите, что $\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} \geq \frac{8}{9}$.
Решение. Переместим отрезок в точку 0, то есть будем рассматривать отрезок $[0; 3]$. Обозначим взятые точки $0 \leq x < y < z \leq 3$. Тогда $\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} = \frac{1}{(y-x)(z-x)} + \frac{1}{(y-x)(z-y)} + \frac{1}{(z-y)(z-x)} \geq \frac{1}{y \cdot 3} + \frac{1}{y(3-y)} + \frac{1}{(3-y) \cdot 3}$ (мы использовали неравенства $-x \leq 0, z \leq 3$). При замене $-x$ на 0, а z на 3 все знаменатели увеличились, а обратные им величины уменьшились. $\frac{1}{3}\left(\frac{1}{y} + \frac{3}{y(3-y)} + \frac{1}{(3-y)}\right) = \frac{3-y+3+y}{3y(3-y)} = \frac{2}{y(3-y)}$.Неравенство $\frac{2}{y(3-y)} \geq \frac{8}{9}$равносильно неравенству $(2y-3)^2 \geq 0$, поэтому исходное неравенство верно.
Комментарий. *Верное решение – 20 баллов. Доказательство проведено только частично – 10 баллов. Решение начато, есть некоторое продвижение – 5 баллов. Решение начато, но продвижение несущественно – 1 балл. Только верный ответ без решения – 1 балл.*

4. Найдите все натуральные числа a, для которых число
$$\frac{a + 1 + \sqrt{a^5 + 2a^2 + 1}}{a^2 + 1}$$
также является натуральным.
Ответ.$a = 1$.
Решение. Обозначим $a + 1 = b, \sqrt{a^5 + 2a^2 + 1} = c$. Запишем многочлен $c^2 - b^2 = a^5 + 2a^2 + 1 - (a + 1)^2 = a^5 + a^2 - 2a$, и поделим его на $a^2 + 1$ «уголком», получим остаток, равный $-(a + 1)$. При $a > 1$ модуль остатка меньше $a^2 + 1$, поэтому остаток не может делиться на $a^2 + 1$ ни при каком $a > 1$. Но если $c^2 - b^2$ не делится на знаменатель $a^2 + 1$, то и $b + c$ не делится. Уравнению удовлетворяет единственное значение $a = 1$.
Комментарий. *Верное решение – 20 баллов. Есть пробелы в обосновании – 15 баллов. Найдено значение $a = 1$, но не доказано, что других ответов нет – 1 балл. Доказательство начато – ещё 1 балл. Доказательство начато, есть некоторое продвижение – 5 баллов. Доказательство проведено только частично – 10 баллов.*

5. Найдите целую часть числа
$$\frac{1}{\sqrt{1}+\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{3}+\sqrt{4}} + \cdots + \frac{1}{\sqrt{623}+\sqrt{624}}.$$
Ответ.12.
Решение. Обозначим $A = \frac{1}{\sqrt{1}+\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{3}+\sqrt{4}} + \cdots + \frac{1}{\sqrt{623}+\sqrt{624}}$. Возьмём число $B = \frac{1}{\sqrt{2}+\sqrt{3}} + \frac{1}{\sqrt{4}+\sqrt{5}} + \cdots + \frac{1}{\sqrt{624}+\sqrt{625}}$. Число слагаемых одинаково, каждое слагаемое в A больше соот-

ветствующего слагаемого в B, поэтому $A > B$. Избавимся от иррациональности в знаменателях: $A = \sqrt{2} - \sqrt{1} + \sqrt{4} - \sqrt{3} + \dots + \sqrt{624} - \sqrt{623}$, $B = \sqrt{3} - \sqrt{2} + \sqrt{5} - \sqrt{4} + \dots + \sqrt{625} - \sqrt{624}$. Очевидно, $A + B = \sqrt{625} - \sqrt{1} = 24$. Оценим $A - B$.

$$A - B = \frac{1}{\sqrt{1}+\sqrt{2}} - \left(\frac{1}{\sqrt{2}+\sqrt{3}} - \frac{1}{\sqrt{3}+\sqrt{4}}\right) - \dots - \left(\frac{1}{\sqrt{622}+\sqrt{623}} - \frac{1}{\sqrt{623}+\sqrt{624}}\right) - $$
$$- \frac{1}{\sqrt{624}+\sqrt{625}} < \frac{1}{\sqrt{1}+\sqrt{2}} < 1.$$

Подставим $B = 24 - A$: $A - 24 + A < 1$, отсюда $A < 12{,}5$. Но $A > B$, значит, $A > 12$. Следовательно, целая часть числа A равна 12.

Комментарий. *Верное решение – 20 баллов. Доказательство начато, есть некоторое продвижение – 5 баллов. Решение начато, но продвижение незначительно – 1 балл. Только верный ответ без решения – 1 балл.*

Вариант 2

1. Для отбора на соревнования борец Владимир должен был провести три схватки и одержать подряд хотя бы две победы. Его соперниками были Андрей (А) и Борис (Б). Владимир мог выбрать схему встреч: АБА или БАБ. Вероятность Владимира потерпеть поражение в одной схватке от Бориса равна 0,3, а от Андрея 0,4; вероятности постоянны. При какой схеме вероятность отобраться на соревнования больше, и чему равна эта вероятность?

Ответ. АБА; $p = 0{,}588$.

Решение. Пусть Владимир два раза встречается с более слабым соперником, то есть рассмотрим схему БАБ. Тогда $p_1 = 0{,}7 \cdot 0{,}6 \cdot 0{,}3 + 0{,}7 \cdot 0{,}6 \cdot 0{,}7 + 0{,}3 \cdot 0{,}6 \cdot 0{,}7 = 0{,}546$.Пусть Владимир выбирает схему АБА. Тогда $p_2 = 0{,}6 \cdot 07 \cdot 0{,}4 + 0{,}6 \cdot 0{,}7 \cdot 0{,}6 + 0{,}4 \cdot 0{,}6 \cdot 0{,}7 = 0{,}588$.

Комментарий. *Верное решение – 20 баллов. В верном решении одна арифметическая ошибка – 18 баллов. При верной схеме допущены вычислительные ошибки – 15 баллов. Не учитывалось, что выигрыши должны быть подряд – 10 баллов. В решении есть некоторое продвижение – 5 баллов. Решение начато, но продвижение несущественно – 1 балл. Решение неверно или отсутствует – 0 баллов. Только верный ответ без решения – 0 баллов.*

2. Найдите для всех натуральных $n > 1$ положительные решения системы

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + \dots + nx_n = 3, \\ \dfrac{1}{x_1} + \dfrac{1}{2x_2} + \dots + \dfrac{1}{nx_n} = 3. \end{cases}$$

Ответ. При $n = 3$: $x_1 = 1, x_2 = {}^1/_2, x_3 = {}^1/_3$; при $n = 2$: $x_1 = \frac{3\pm\sqrt{5}}{2}, x_2 = \frac{3\mp\sqrt{5}}{4}$. При гих$n$ решений не существует.

Решение. Обозначим $y_k = kx_k$ и сложим уравнения системы:

$$\left(y_1 + \frac{1}{y_1}\right) + \left(y_2 + \frac{1}{y_2}\right) + \dots + \left(y_n + \frac{1}{y_n}\right) = 6.$$

Для положительных чисел справедливо неравенство $a + \frac{1}{a} \geq 2$(так как $a^2 + 1 - 2a \geq 0$). Поэтому левая часть не меньше $2n$, отсюда $n \leq 3$. При $n = 3$ каждое из слагаемых равно 2, отсюда $y_1 = y_2 = y_3 = 1$, и $x_1 = 1, x_2 = {}^1/_2, x_3 = {}^1/_3$. При $n = 2$ получается система

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 = 3, \\ \dfrac{1}{x_1} + \dfrac{1}{2x_2} = 3. \end{cases}$$

$$2x_2 = 3 - x_1, \frac{1}{x_1} + \frac{1}{3-x_1} = 3, x_1 = \frac{3\pm\sqrt{5}}{2}, x_2 = \frac{3\mp\sqrt{5}}{4}.$$

Комментарий. *Верное решение – 20 баллов, баллы раскладываются так: за решения при каждом найденном значении* n *– 7 баллов, за доказательство, что при* $n > 3$ *решений нет – 6 баллов. В верном решении одна вычислительная ошибка – 19 баллов. При* $n = 2$ *потеряна одна пара корней – снимается 1 балл. В решении есть некоторое продвижение – 5 баллов. Решение начато, но продвижение несущественно – 1 балл. Решение неверно или отсутствует – 0 баллов.*

3. Докажите, что $\cos\frac{\pi}{7} + \cos\frac{3\pi}{7} + \cos\frac{5\pi}{7} = \frac{1}{2}$.

Решение. Обозначим $S = \cos\frac{\pi}{7} + \cos\frac{3\pi}{7} + \cos\frac{5\pi}{7}$. Рассмотрим сумму A семи косинусов:

$$A = \cos\frac{\pi}{7} + \cos\frac{3\pi}{7} + \cos\frac{5\pi}{7} + \cos\frac{7\pi}{7} + \cos\frac{9\pi}{7} + \cos\frac{11\pi}{7} + \cos\frac{13\pi}{7}.$$

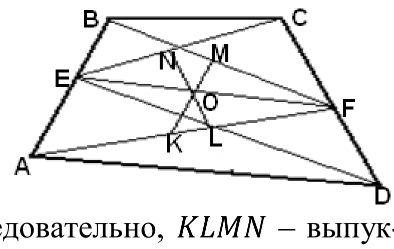
Посколькуcos $\alpha = \cos(2\pi - \alpha)$, $A = 2 \cdot \left(\cos\frac{\pi}{7} + \cos\frac{3\pi}{7} + \cos\frac{5\pi}{7}\right) - 1$. Докажем, что $A = 0$. Проведём из начала координат семь единичных векторов под углами $\frac{\pi}{7}, \frac{3\pi}{7}, \dots, \frac{13\pi}{7}$, и рассмотрим их сумму, это некоторый вектор. При повороте на угол $\frac{2\pi}{7}$ система векторов перейдёт в себя, то есть вектор, равный сумме векторов, не изменится. Но он равен исходному вектору, повёрнутому на угол $\frac{2\pi}{7}$. Следовательно, исходный вектор – нулевой. Каждый $\cos\frac{k\pi}{7}$ равен проекции соответствующего вектора на ось абсцисс, A равно сумме проекций, или, что то же, проекции суммы – нулевого вектора. Таким образом, $A = 0$, и из уравнения $A = 2S - 1$ получаем, что $S = \frac{1}{2}$.

Комментарий. *Верное решение – 20 баллов. Есть некоторое продвижение – 5 баллов. Решение начато, но продвижение несущественно – 1 балл. Решение неверно или отсутствует – 0 баллов.*

4. Коля и Влад начертили одинаковые выпуклые четырёхугольники $ABCD$. На стороне AB каждый из них выбрал точку E, на стороне CD каждый выбрал точку F. Коля выбрал точки на серединах сторон, а Влад – на расстоянии $\frac{1}{3}$ длины стороны AB от A и на расстоянии $\frac{1}{3}$ длины стороны CD от C. Потом каждый из них отметил середины ков AF, DE, BF, CE, получил соответственно точки K, L, M, N, и соединил их в указанном порядке. У каждого получился четырехугольник $KLMN$. Коля считает, что площадь его четырёхугольника больше. Прав ли он?

Ответ. Нет. Площади равны.

Решение. Докажем сначала, что если $KLMN$ – четырёхугольник (а не отрезок или треугольник), то он выпуклый.Поскольку MK – средняя линия треугольника AFB, то отрезок MK пересекает отрезок EF в его середине O. Аналогично, LN – средняя линия треугольника CED, и отрезок LN пересекает отрезок EF в его середине O. Поэтому отрезки LN и KM пересекаются в их внутренней точке О. Следовательно, $KLMN$ – выпуклый четырёхугольник. Докажем теперь, что его площадь не зависит от выбора точек E и F. Площадь выпуклого четырехугольника равна половине произведения диагоналей на синус угла между ними. Но диагональ $MK = \frac{AB}{2}$, диагональ $LN = \frac{CD}{2}$, и диагонали параллельны прямымAB и CD, поэтому угол между ними равен углу между прямыми AB и CD. Значит, площадь четырёхугольника не зависит от выбора точек E и F, площади обоих четырехугольников, построенных мальчиками, равны.



Комментарий. *Верное решение – 20 баллов. Не доказано, что четырёхугольник выпуклый – 15 баллов. Есть продвижение – 10 баллов. Рассмотрен частный случай – 5 баллов. Решение начато, но продвижение несущественно – 1 балл. Только верный ответ без решения – 0 баллов.*

5. Трое бельчат на завтрак обычно едят кашу: манную (М), пшённую (П), овсяную (О), гречневую (Г). Ни одна каша не нравится всем троим бельчатам, но для каждой пары бельчат есть хотя бы одна каша, которая нравится им обоим. Сколько можно составить разных таблиц, в которых в каждой клетке стоит плюс (если нравится) или минус (если не нравится)?

	М	П	О	Г
Бельчонок 1				
Бельчонок 2				
Бельчонок 3				

Ответ.132.

Решение. Если двум разным парам нравится одна каша, то каша нравится троим бельчатам, и нарушается первое условие. Из трёх бельчат можно составить три разные пары, этим трём парам нравятся разные каши. Есть 4 способа выбрать эти 3 каши, и $3! = 6$ способов распределить 3 каши между тремя парами. Всего получается 24 варианта распределения каш, которые нравятся парам. С четвёртой кашей могут быть такие варианты: 1) не нравится никому, 2) нравится только одному бельчонку, 3) нравится только одной паре.

В случае 1) общее число вариантов осталось равным 24. В случае 2) число 24 умножается на число выборов бельчонка, которому нравится четвёртая каша, то есть на 3, получаем 72. В случае 3) ситуация такая: есть пара, которой нравится две каши, и две пары, которым нравится две другие каши. Две первые каши можно выбрать числом способов $\frac{4\cdot 3}{2} = 6$. Пару, которой нравится две первые каши, можно выбрать тремя способами (так как выбираем одну из трёх). Две оставшиеся каши можно распределить между двумя оставшимися парами двумя способами. Всего вариантов в этом случае $6 \cdot 3 \cdot 2 = 36$.

Итак, всего разных таблиц может быть $24 + 72 + 36 = 132$.

Комментарий. *Верное решение – 20 баллов. В верном решении есть вычислительные ошибки – 15 баллов. Рассмотрен частный случай – 5 баллов. Решение начато, но продвижение несущественно – 1 балл. Только верный ответ без решения – 0 баллов.*

Вариант 3

1. Сугроб высотой 468 см за первый час уменьшился на 6 см по высоте, за второй час – на 12 см по высоте, ..., за -й час – на $6k$ см по высоте. За некоторое время T сугроб растаял полностью. Какая часть сугроба по высоте растаяла за время $\frac{T}{2}$?

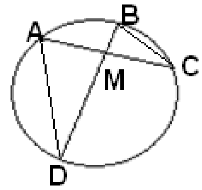
Ответ. $\frac{7}{26}$.

Решение. Из уравнения $6 + 12 + \cdots + 6n = 468$ находим $6 \cdot \frac{n(n+1)}{2} = 468$ или $n^2 + n - 156 = 0$. Отсюда $n = 12$, то есть сугроб растаял за 12 часов. За 6 часов он растаял на $6 \cdot \frac{6\cdot 7}{2} = 126$ см по высоте, что составляет $\frac{126}{468} = \frac{7}{26}$.

Комментарий. *Верное решение – 20 баллов. Найдена высота 126 см, но ответ не получен или неверно вычислен – 18 баллов. Найдено только $T = 12$ – 10 баллов. При верном ходе решения ошибка в формуле – 5 баллов. Решение начато, но продвижение несущественно – 1 балл. Только верный ответ без решения – 0 баллов.*

2. На границе круглой поляны по часовой стрелке отмечены точки A, B, C, D. В точке A находится бельчонок Ан, в точке B – бельчонок Бим, в точке C стоит сосна, в точке D – дуб. Бельчата одновременно начали бежать, Ан к сосне, Бим к дубу. Они столкнулись в точке M, которая находится ближе к сосне, чем к дубу. Верно ли, что если бы Ан побежал из точки A к дубу, а Бим из точки B к сосне, Ан прибежал бы первым? Каждый бельчонок бежит по прямой и со своей постоянной скоростью.

Ответ. Нет.



Решение. Обозначим скорость Ана – v, скорость Бима – u. До точки M бельчата добрались за одинаковое время, значит, $\frac{AM}{v} = \frac{BM}{u}$. Треугольники DAM и CBM подобны (по трём углам).
Поэтому $\frac{AD}{BC} = \frac{AM}{BM}$. Но $\frac{AM}{BM} = \frac{v}{u}$, то есть $\frac{AD}{BC} = \frac{v}{u}$, отсюда $\frac{AD}{v} = \frac{BC}{u}$. Значит, бельчата прибегут одновременно.

Комментарий. *Верное решение – 20 баллов. Верное решение не доведено до ответа – 15 баллов. В решении есть неточности – 15 баллов. Решение на основе примера – 10 баллов. Есть некоторое продвижение – 5 баллов. Решение неверно или отсутствует – 0 баллов.*

3.Каким числом способов можно разложить 30 яблок в 3 корзинки так, чтобы в первой корзинке лежало меньше яблок, чем во второй, во второй меньше, чем в третьей, и пустых корзинок не было?

Ответ.61.

Решение. Рассмотрим уравнение $a + b + c = 30$.Расставим 30 единиц в ряд, выберем два промежутка между единицами, и поставим в них по чёрточке. Число единиц слева от первой чёрточки равно a (число яблок в первой корзине), справа от второй – равно c (число яблок в третьей корзине). Число способов выбрать два промежутка равно $\frac{29 \cdot 28}{2} = 406$. Надо вычесть из этого числа количество случаев, когда среди чисел a, b, c есть равные. Пусть $a = b$. Тогда $2a + c = 30$, это уравнение имеет 14ненулевых решений (c чётное и может изменяться от 2 до 28). Аналогично, будет по 14 случаев, когда $a = c$ или $b = c$. Итак, $406 - 3 \cdot 14 = 364$.Случай $a = b = c$ посчитан один раз в общем числе способов и три раза вычтен, а надо его исключить всего один раз, поэтому требуется прибавить 2. Число $364 + 2 = 366$ равно числу упорядоченных троек различных a, b, c. Но нужен порядок $a < b < c$, поэтому разделим на число перестановок трёх элементов: $\frac{366}{6} = 61$.

Комментарий. *Верное решение – 20 баллов. Верное решение не доведено до верного ответа – 15 баллов. В решении есть значительное продвижение – 10 баллов. Только верный ответ без решения – 0 баллов.*

4. В выпуклом семиугольнике $ABCDEFG$ рассматриваются семь четырёхугольников, вершинами которых являются четыре последовательные по часовой стрелке вершины семиугольника. Могут ли четыре из семи четырёхугольников быть описанными?

Ответ. Нет.

Решение.У двух четырёхугольников, соседних по часовой стрелке, есть две общие стороны. Пусть это четырёхугольники $ABCD$ и $BCDE$. Предположим, они оба описанные. Тогда $AB + CD = BC + AD, CD + BE = BC + DE$. Вычитая, получаем: $AB - BE = AD - DE$или $AD + +BE = AB + DE$. Поскольку семиугольник выпуклый, диагонали AD и BEпересекаются во внутренней точке семиугольника; обозначим её O. Тогда $AD = AO + OD$, $BE = BO + OE$. Подставим в полученное ранее равенство:

$$AD + BE = AO + OD + BO + OE = (AO + BO) + (OE + OD) = AB + DE.$$

Но по неравенству треугольника $AO + BO > AB, OE + OD > DE$; противоречие. Таким образом, из двух четырёхугольников, соседних по часовой стрелке, не больше одного может быть описанным. Занумеруем четырёхугольники по кругу от 1 до 7. Очевидно, что

из них нельзя выбрать четыре номера, среди которых нет соседних (если мы выбираем $1, 3, 5$, то номер 7 соседний с 1). Если есть три описанных, то любой, взятый четвёртым, является соседним к какому-нибудь из них, и по доказанному не может быть описанным.
Комментарий. *Верное решение – 20 баллов. Нет строгого доказательства, что обязательно будут соседние четырехугольники – 18 баллов. Есть пробелы в обосновании – 15 баллов. В решении есть некоторое продвижение – 5 баллов. Решение начато, но продвижение несущественно – 1 балл. Решение неверно или отсутствует – 0 баллов.*

5. Найдите все пары $(x;\, y)$ натуральных чисел, для которых оба числа $x^2 + 8y$; $y^2 - 8x$ являются точными квадратами.
Ответ. $(x;\, y) = (n;\, n+2)$, где n – натуральное число, а также $(7;\, 15)$, $(33;\, 17)$, $(45;\, 23)$.
Решение. Легко проверить, что пары вида $(n;\, n+2)$, где n – натуральное число, удовлетворяют условию задачи. Пусть $(x;\, y)$ – любая другая пара, удовлетворяющая условию задачи. Рассмотрим два случая.
а) Пусть сначала $y < x + 2$. Тогда $x^2 < x^2 + 8y < x^2 + 8(x + 2) = (x + 4)^2$, откуда $x^2 + 8y = (x + k)^2$, где $k \in \{1;\, 2;\, 3\}$. Очевидно, возможен лишь случай $k = 2$ (по чётности), и тогда $x = 2y - 1$. Осталось выяснить, при каких натуральных y число $y^2 -$ ло $y^2 - 8x = y^2 - 16y + 8$ будет точным квадратом. Пусть $y^2 - 16y + 8 = a^2$, гда $y = \frac{16 \pm \sqrt{256 - 4(8 - a^2)}}{2} = 8 \pm \sqrt{56 + a^2}$. Число под корнем должно быть точным квадратом: $56 + a^2 = c^2$, $c^2 - a^2 = 56$. Разложим 56 на множители и рассмотрим системы. Учитывая, что $c - a$ и $c + a$ имеют одинаковую чётность, отбросим лишние, останутся системы $\begin{cases} c - a = 4 \\ c + a = 14 \end{cases}$, $\begin{cases} c - a = 2 \\ c + a = 28 \end{cases}$, откуда $c = 9, a = 5$ или $c = 15, a = 13$. При $a = 5$ значение $y = 8 \pm \sqrt{56 + 25} = 8 + 9 = 17$. При $a = 13$ значение $y = 8 \pm \sqrt{56 + a^2} = 8 + 15 = 23$. Поскольку $x = 2y - 1$, получаем пары $(45;\, 23)$ и $(33;\, 17)$.
б) Пусть теперь $y > x + 2$, т. е. $x < y - 2$. Здесь $y > 4$, и мы имеем $(y - 4)^2 = y^2 - 8(y - 2) < y^2 - 8x < y^2$. Значит, $y^2 - 8x = (y - k)^2$, где $k \in \{1;\, 2;\, 3\}$. Опять возможен только случай $k = 2$ (по чётности), так что $y = 2x + 1$. Пусть $x^2 + 16x + 8 = b^2$, тогда $x = \frac{-16 \pm \sqrt{256 - 4(8 - b^2)}}{2} = -8 \pm \sqrt{56 + b^2}$. Выше показано, что число под корнем является точным квадратом только при $b = 5$ или $b = 13$. Тогда $x = 1$ или $x = 7$. Получаем пары $(1;\, 3)$ и $(7;\, 15)$, первая из которых входит в множество $\{(n;\, n+2)\}$.
Комментарий. *Верное решение – 20 баллов. Найдены пары* $(n;\, n+2)$, в *исследовании других случаев есть некоторое продвижение – 10 баллов. При любом числе найденных ответов, если не доказано, что нет других решений, то не больше 10 баллов. Найдены только пары* $(n;\, n+2)$ *– 5 баллов. Найдены только пары* $(n;\, n+2)$ *для чётного или для нечётного* n *– 2 балла. Найдены только отдельные решения, удовлетворяющие условию* $y = x + 2$, *– 1 балл. Решение неверно или отсутствует – 0 баллов.*

Вариант 4

1. Какова вероятность, что в случайной последовательности из 8 единиц и двух нулей между двумя нулями ровно три единицы?
Ответ. $\frac{2}{15}$.
Решение. Занумеруем позиции в последовательности с первой по десятую. Если один из нулей оказывается на позиции 1 – 4 или 7 – 10, то у него может быть всего один ноль, отстоящий на три цифры. Если один из нулей оказывается на позиции 5 или 6, то у него два таких нуля. Число всех исходов равно $10 \cdot 9 = 90$. Число благоприятных исходов равно $8 + 2 \cdot 2 = 12$. Вероятность равна $\frac{12}{90} = \frac{2}{15}$.

Комментарий. *Верное решение – 20 баллов. В верном решении допущены арифметические ошибки – 15 баллов. Неправильный метод подсчёта числителя или знаменателя – 5 баллов. Решение начато, но продвижение несущественно – 1 балл. Только верный ответ без решения – 0 баллов.*

2. Каждый из 8 бельчат бросил шишку в какого-нибудь другого бельчонка, независимо от других. Докажите, что всегда найдётся группа из трёх бельчат, которые не бросили шишку в бельчонка из этой группы.

Решение. По принципу Дирихле найдется бельчонок А, в которого бросили не больше 1 шишки (иначе должны были кидать 16 шишек, а их всего 8). Запишем бельчонка А в отдельную группу. Вычеркнем из списка бельчонка, в которогоА кидал шишку, и того, кто кинул шишку в А (если такой есть). Осталось 6 или 7 бельчат. По принципу Дирихле среди оставшихся опять найдется бельчонок Б, в которого бросили не больше 1 шишки. Добавим бельчонка Б в группу к А. Вычеркнем бельчонка, в которого Б кидал шишку, и того, кто кинул шишку в Б (если такой есть). Осталось не меньше 4 бельчат. Все они не кидали шишки в А и Б, и А и Б не кидали шишки в них. Поэтому можно добавить в группу к А и Б любого бельчонка В из этих троих.

Комментарий. *Верное решение – 20 баллов. Есть небольшие пробелы в обосновании – 15 баллов. В решении есть некоторое продвижение – 5 баллов. Рассмотрены не все случаи – 5 баллов. Решение начато, но продвижение несущественно – 1 балл. Решение неверно или отсутствует – 0 баллов.*

3. Разрешимо ли уравнение $y^2 + y = x^3 - x$ во взаимно простых натуральных числах?

Ответ. Нет.

Решение. Перепишем уравнение в виде $y(y + 1) = x(x^2 - 1)$.По условию НОД$(x;\, y) = 1$, поэтому отсюда следует, что $y + 1 = kx$ для некоторого натурального числа k. Тогда $x^2 - 1 = ky$. Исключив y, получим $x^2 - k^2x + k - 1 = 0$. Дискриминант этого квадратного уравнения $D = k^4 - 4k + 4$ должен быть точным квадратом. Однако $(k^2 - 1)^2 < D < (k^2)^2$при $k > 1$. Значит, $k = 1$ и $x = 1$. Но тогда $y(y + 1) = 0$ противоречие.

Комментарий. *Верное решение – 20 баллов. Записан дискриминант – 15 баллов. Есть пробелы в обосновании – 15 баллов. Получено соотношение $x^2 - k^2x + k - 1 = 0$ – 10 баллов. Получено соотношение $y + 1 = kx$ – 5 баллов. В решении есть некоторое продвижение – 5 баллов. Решение начато, но продвижение несущественно – 1 балл. Решение неверно или отсутствует – 0 баллов.*

4. Точки P и Q – середины дуг KL и LM, описанной окружности треугольника KLM, LS – биссектриса этого треугольника. Оказалось, что $\angle KLM = 2\angle KML$ и $\angle PSQ = 90^\circ$. Найдите углы треугольника KLM.

Ответ.$\angle L = 90^\circ$, $\angle K = \angle M = 45^\circ$.

Решение. По условию $\angle M = \frac{\angle L}{2} = \angle SLM$, т.е. треугольник LSM равнобедренный: $LS = MS$. Кроме этого, $LQ = QM$, так что треугольники LSQ и MSQ равны по трем сторонам, и SQ – биссектриса угла LSM. По условию, прямая SP перпендикулярна этой биссектрисе, поэтому SP – биссектриса угла LSK. Теперь рассмотрим треугольники PKS и PLS. У них есть общая сторона SP, равны стороны $KP = LP$, а также равны углы KSP и LPS. К сожалению, эти углы находятся не между равными сторонами, поэтому первый признак равенства неприменим. Однако это означает, что углы PKS и PLS либо равны, либо дополняют друг друга до 180°. Объясним это с помощью теоремы синусов в треугольниках PKS и PLS:

$$\sin\angle PKS = PS \cdot \frac{\sin\angle PKS}{KP} = PS \cdot \frac{\sin\angle LSP}{LP} = \sin\angle PLS.$$

Во втором случае четырехугольник $KPLS$ оказался бы вписанным, чего не может быть: точка S не лежит на окружности, проходящей через K, L, P. Следовательно, треугольники PKS и PLS все же равны и $KS = MS$.
Итак, $KS = LS = MS$, иными словами, медиана треугольника KLM равна половине стороны KM. Значит, треугольник прямоугольный. А поскольку медианаLS совпадает с биссектрисой, он еще и равнобедренный.
Комментарий. *Верное решение – 20 баллов. Есть пробелы в обосновании – 15 баллов. Доказаны некоторые полезные соотношения – 5 баллов. Решение начато, но продвижение несущественно – 1 балл. Решение неверно или отсутствует – 0 баллов.*

5. Докажите, что для всех натуральных n выполняется неравенство

$$\frac{1}{n^2+1}+\frac{2}{n^2+2}+\cdots+\frac{n}{n^2+n}<\frac{1}{2}+\frac{1}{6n}.$$

Решение. Представим каждое слагаемое $\frac{k}{n^2+k}$ в левой части неравенства в виде разности $\frac{k}{n^2}-\frac{k^2}{n^2(n^2+k)}$ и сложим почленно полученные равенства:

$$\frac{1}{n^2+1}+\frac{2}{n^2+2}+\cdots+\frac{n}{n^2+n} = \frac{1+2+\cdots+n}{n^2}-\left(\frac{1}{n^2(n^2+1)}+\frac{4}{n^2(n^2+2)}+\cdots+\frac{n^2}{n^2(n^2+n)}\right).$$

Теперь заменим знаменатели у всех слагаемых в скобке на $n^2(n^2+n)$, от этого сумма только вырастет и станет равной

$$\frac{1+2+\cdots+n}{n^2}-\frac{1+4+\cdots+n^2}{n^2(n^2+n)}=\frac{n(n+1)}{2n^2}-\frac{n(n+1)(2n+1)}{6n^3(n+1)}=\frac{n(n+1)}{2n^2}-\frac{(2n+1)}{6n^2}$$

$$=\frac{3n^2+n-1}{6n^2}=\frac{1}{2}+\frac{n-1}{6n^2}<\frac{1}{2}+\frac{1}{6n}.$$

Комментарий. *Верное решение – 20 баллов. Получена близкая оценка суммы – 10 баллов. Есть пробелы в обосновании – 15 баллов. В решении есть некоторое продвижение – 5 баллов. Решение начато, но продвижение несущественно – 1 балл. Решение неверно или отсутствует – 0 баллов.*