## ОТВЕТЫ И РЕШЕНИЯ

## 10 КЛАСС

Общее количество баллов **100. Решение каждой задачи оценивается Жюри из 20 баллов** в соответствии с разработанными критериями и методикой оценки:

| Баллы | Правильность (ошибочность) решения |
|---|---|
| 20 | Полное (верное) решение. |
| 16-20 | Верное решение. Имеются небольшие недочёты, в целом не влияющие на решение. |
| 12-16 | Решение в целом верное. Однако оно содержит ряд ошибок, либо не рассмотрены отдельные случаи, но может стать правильным после небольших исправлений или дополнений. |
| 8-12 | Верно рассмотрен один из двух существенных случаев. |
| 6-8 | Доказаны вспомогательные утверждения, помогающие в решении задачи. |
| 2-6 | Рассмотрены частные случаи при отсутствии решения (или при ошибочном решении). |
| 0-2 | Решение начато, но продвижение незначительное. |
| 0 | Решение неверное, продвижения отсутствуют. |
| 0 | Решение отсутствует. |

### Вариант 1

1) Пять членов жюри олимпиады проверяли работы. Первый, второй и четвертый члены жюри вместе могут проверить работы за 20 часов; второй, третьей и пятый вместе – за 15 часов. Если в проверке участвуют все, кроме второго члена жюри, то на проверку работ требуется 10 часов. Во сколько раз быстрее будет выполнена проверка работ всеми членами жюри по сравнению с проверкой работ только вторым членом жюри?
**Ответ.** В 13 раз.
**Решение.** За час второй член жюри проверит $\frac{1}{2}\cdot\left(\frac{1}{20}+\frac{1}{15}-\frac{1}{10}\right)=\frac{1}{120}$ всех работ, что в 12 раз меньше, чем за час проверят четыре остальных члена жюри.

2) Ненулевые числа $p$, $q$, $r$ являются тремя последовательными членами арифметической прогрессии. Докажите, что уравнение $px^2+2\sqrt{2}qx+r=0$ имеет два решения.
**Решение.** Из характеристического свойства арифметической прогрессии получаем $q=\frac{p+r}{2}$. Тогда дискриминант интересующего нас квадратного уравнения равен $D=8b^2-4ac=2(a+c)^2-4ac=2a^2+2c^2>0$. Поэтому квадратное уравнение имеет два решения.

3) В таблице $10\times 10$ расставлены различные натуральные числа от 1 до 100. Оказалось, что в каждой строке (слева направо) и в каждом столбце (снизу верх) числа идут в порядке возрастания. Найдите наибольшее возможное значение суммы чисел шестого столбца.
**Ответ.** 735.
**Решение.** *Оценка.* Заметим, что сумма чисел в последних пяти столбцах таблицы не превосходит $51+52+\cdots+100=151\cdot 25=3775$. Обозначим через $S$ сумму чисел шестого столбца. Так как каждое число в седьмом столбце больше, чем число в шестом столбце,

находящееся в той же строке, то сумма чисел в седьмом столбце не меньше $S+10$. Аналогично, сумма чисел в восьмом столбце не меньше $S+20$, в девятом – не меньше $S+30$, а в десятом – не меньше $S+40$. Следовательно, $S+(S+10)+(S+20)+(S+30)+(S+40)\leq 3775$, откуда $S\leq 735$.
*Пример.* В первых пяти столбцах расставим числа от 1 до 50 по строкам, идя снизу вверх, т.е. в первой строке поставим числа $1,2,3,4,5$, во второй – $6,7,8,9,10$ и т.д. Аналогично расставим в последних пяти столбцах числа от $51$ до $100$. Тогда сумма чисел в шестом столбце будет равна $51+56+\cdots+96=735$.

4) Окружность, построенная на стороне $KM$ остроугольного треугольника $KLM$ как на диаметре, пересекает стороны треугольника $KL$ и $LM$ в точках $P$ и $Q$ соответственно. Касательные к этой окружности, проведенные в точках $P$ и $Q$, пересекаются в точке $R$. Докажите, что прямая $LR$ перпендикулярна $KM$.
**Решение.** Обозначим углы $LKM$ и $LMK$ соответственно через $\alpha$ и $\gamma$, и пусть $O$ – середина $KM$. В треугольнике $KOP$ стороны $OK$ и $OP$ равны как радиусы, поэтому $\angle KPO=\angle PKO=\alpha$, $\angle KOP=180^\circ-2\alpha$. Аналогично, $\angle MOQ=180^\circ-2\gamma$. Отсюда $\angle POQ=180^\circ-\angle KOP-\angle POQ=2\alpha+2\gamma-180^\circ$. В четырехугольнике $OPRQ$ углы $P$ и $Q$ – прямые, значит, $\angle PRQ=180^\circ-\angle POQ=360^\circ-2\alpha-2\gamma$. Заметим, что $\angle KLM=180^\circ-\angle LKM-\angle LMK=180^\circ-\alpha-\gamma$, так что $\angle PRQ=2\angle KLM=2\angle PLQ$. Кроме того, $RP=RQ$ как отрезки касательных, проведенных из одной точки. Из равенства $RP=RQ$ и $\angle PRQ=2\angle PLQ$ следует, что $R$ – центр описанной окружности треугольника $PLQ$. Значит, $RL=RP$, откуда $\angle PLR=\angle LPR=180^\circ-\angle OPR-\angle KPO=90^\circ-\alpha$. То есть, $LR$ образует со стороной $LK$ такой же угол, как высота, опущенная из $L$ на $KM$. Значит, эта высота проходит через $R$.

5) Печенье макаруны трёх сортов (фисташковые, ванильные, карамельные) упаковывают в стандартные коробки по 20 изделий в каждой. Каждая коробка содержит макаруны всех видов, причем порядок их расположения в коробке не существенен. Сколько можно составить различных наборов макарунов при условии, что в коробке фисташковых макарунов не менее 2 и не более 12, ванильных тоже не менее 2 и не более 12, а карамельных не менее 3 и не более 14?
**Ответ.** 90.
**Решение.** Пусть в наборе $x$ фисташковых, $y$ ванильных, $z$ карамельных макарунов. Тогда нам нужно найти число целочисленных решений уравнения $x+y+z=20$ при дополнительных ограничениях $2\leq x\leq 12$, $2\leq y\leq 12$, $3\leq z\leq 14$. Вычтем по 2 из первых двух неизвестных, и 3 из последней. Это даст уравнение $a+b+c=13$, где $a$, $b$, $c$ – целые неотрицательные числа, и ограничены сверху величинами 10, 10, 11. Если ограничений нет, то число решений равно $\bar{C}_3^{13}=C_{15}^2=105$. Отсюда надо вычесть количество лишних решений. Последнее означает $a\geq 11$, или $b\geq 11$, или $c\geq 12$. Эти условия попарно несовместимы. Если $a\geq 11$, то переходим к уравнению $(a-11)+b+c=2$. В целых неотрицательных числах и имеем 6 решений. Аналогично для $b\geq 11$. Для $c\geq 12$ получится $a+b+(c-12)=1$ и решений будет 3. Итого различных наборов $105-6-6-3=90$.

**Вариант 2**

1) Шесть членов жюри олимпиады проверяли работы. Все шестеро, исключая пятого, в состоянии проверить работы за 6 дней. Если бы они проверяли вчетвером без первого и третьего, то все работы были бы проверены за 10 дней. Поскольку второй, четвертый и шестой были заняты, работы были проверены оставшимися за 12 дней. Какой процент всех работ при этом был проверен первым и третьим членами жюри за 4 дня?
**Ответ.** 30%.
**Решение.** За день члены жюри вместе проверяют $\frac{1}{2}\cdot\left(\frac{1}{6}+\frac{1}{10}+\frac{1}{12}\right)=\frac{7}{40}$ общего количества всех работ. Значит, 1-й и 3-й преподаватели за день проверяют $\frac{7}{40}-\frac{1}{10}=\frac{3}{40}$, а за четыре дня они проверяют 0,3 всего числа работ.

2) Квадратные трёхчлены $f=ax^2+bx+c$ и $g=px^2+qx+r$ не имеют корней, а их сумма $f+g$ – трёхчлен, имеющий корни. Найдите знак произведения $c\cdot r$.
**Ответ.** $c\cdot r<0$.
**Решение.** Произведение свободных членов отрицательно. Из условия следует, во-первых, что знаки коэффициентов $c$ и $a$ совпадают, так как в противном случае дискриминант $D_f=b^2-4ac$ был бы неотрицателен. Аналогично, совпадают знаки коэффициентов $q$ и $r$. Из условия следует, что при всех значениях переменной $x$ функции $f$ и $g$ сохраняют знак. Поэтому если бы эти знаки совпадали, то и сумма $f+g$ сохраняла бы свой знак, а тогда трёхчлен $f+g$ не имел бы корней. Значит, числа $a$ и $p$, а потому и числа $c$ и $r$ имеют разные знаки.

3) В клетках таблицы $7\times 7$ расставлены числа $-1$, 0 и 1 так, что в каждом квадрате $3\times 3$ сумма чисел равна 0. Какое наибольшее значение может принимать сумма всех чисел таблицы?
**Ответ.** 11.
**Решение.** *Оценка.* В квадрат $3\times 3$ можно поместить уголок из пяти клеток. При этом остаётся четыре клетки, поэтому в каждом таком уголке сумма чисел не превосходит 4. Четыре таких уголка, примыкающие к углам таблицы, покрывают 20 из 24 крайних клеток, значит, сумма чисел во всех крайних клетках таблицы не больше $4\cdot 4+4=20$. Рассмотрим два уголка из 13 клеток, примыкающих к противоположным углам таблицы. Они покрывают две угловые клетки по два раза, а остальные крайние клетки – по одному, поэтому сумма чисел в них не превосходит 22. Следовательно, сумма чисел в одном из уголков не больше 11. Так как остальную часть таблицы можно разбить на квадраты $3\times 3$, в каждом из которых сумма чисел равна 0, то сумма чисел во всей таблице не превосходит 11.
*Пример* см. на рисунке.

| | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 |
| 0 | $-1$ | $-1$ | 0 | $-1$ | $-1$ | 0 |
| 1 | $-1$ | $-1$ | 1 | $-1$ | $-1$ | 1 |
| 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 |
| 0 | $-1$ | $-1$ | 0 | $-1$ | $-1$ | 0 |
| 1 | $-1$ | $-1$ | 1 | $-1$ | $-1$ | 1 |
| 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 |

4) В треугольнике $KLM$ угол $LKM$ тупой. На стороне $LM$ как на диаметре построена окружность, которая пересекает продолжения сторон $LK$ и $MK$ в точках $P$ и $Q$ соответ-

ственно. Через точки $P$ и $Q$ проведены касательные к окружности, которые пересекаются в точке $R$. Докажите, что прямая $LR$ перпендикулярна $KM$.
**Решение.** $\angle LQM$ – вписанный и опирается на диаметр $LM$, поэтому $LQ \perp KM$, отсюда следует, что прямая $LR$ не может быть перпендикулярна $KM$.

5) Печенье макаруны трёх сортов (шоколадные, малиновые, апельсиновые) упаковывают в стандартные коробки по 20 изделий в каждой. Каждая коробка содержит макаруны всех видов, причем порядок их расположения в коробке не существенен. Сколько можно составить различных наборов макарунов при условии, что в коробке шоколадных макарунов не менее 3 и не более 14, малиновых тоже не менее 3 и не более 14, а апельсиновых не менее 2 и не более 12?
**Ответ.** 86.
**Решение.** Задача решается аналогично задаче 5 варианта 1.

## Вариант 3

1) В бассейн ведут две одинаковые трубы. Одна труба заполняет бассейн за 3 часа. Сначала включили обе трубы, но через час одна из труб засорилась, и через неё вода стала поступать вдвое медленнее. Через какое время после этого бассейн заполнится?
**Ответ.** Через 40 минут.
**Решение.** Каждая труба за час заполняет треть бассейна. За первый час две трубы заполнили $\frac{2}{3}$ бассейна. После этого вторая труба стала заполнять бассейн со скоростью $\frac{1}{6}$ бассейна в час, следовательно, две трубы вместе – со скоростью $\frac{1}{6}+\frac{1}{3}=\frac{1}{2}$ бассейна в час. Поэтому оставшуюся треть бассейна они заполнят за $\frac{1}{3}:\frac{1}{2}=\frac{2}{3}$ часа.

2) Приведенный квадратный трехчлен $f(x)=x^2+px+q$ имеет два корня. Докажите, что если вычесть из $p$ один из этих корней, а $q$ увеличить в два раза, то полученный квадратный трёхчлен будет иметь корень.
**Решение.** Из теоремы Виета следует, что если $t_1$ и $t_2$ – корни данного уравнения, то $p=-t_1-t_2$, $q=t_1t_2$. Поэтому новое уравнение имеет вид
$$x^2-(2t_1+t_2)x+2t_1t_2=0.$$
Дискриминант этого уравнения равен
$$D=4t_1^2-4t_1t_2+t_2^2=(2t_1-t_2)^2\geq 0.$$
Значит, у этого уравнения есть корень.

3) Клетчатый прямоугольник из 1000 клеток разбит по линиям сетки на прямоугольники одинаковой площади. Какое наибольшее число не равных прямоугольников может найтись среди частей?
**Ответ.** 4 прямоугольника.
**Решение.** *Оценка.* Пусть прямоугольник разбит на $n$ прямоугольников площади $S$, тогда $nS=1000$. Если имеется пять или более видов прямоугольников, то $n\geq 5$, а $S$ раскладывается в произведение двух множителей не менее чем пятью способами. Таких пар всего две: $n=10$, $S=100$ и $n=5$, $S=200$. В первом случае 100 раскладывается на множители ровно пятью способами, все они по предположению реализуются. В частности, есть прямоугольники $1\times 100$ и $10\times 10$. Поэтому длина исходного прямоугольника не меньше 100, а ширина не меньше 10. Так как его площадь равна 1000, то размеры прямоугольника в точности $10\times 100$. Но расположить в нём одновременно прямоугольники $1\times 100$ и $10\times 10$ не удастся.
Во втором случае 200 раскладывается в произведение двух множителей шестью способами: $1\times 200$, $2\times 100$, $4\times 50$, $5\times 40$, $8\times 25$ и $10\times 20$. Если присутствует прямоугольник

$1 \times 200$, то длина исходного прямоугольника не меньше $200$, а ширина не больше $5$, что исключает наличие прямоугольников $8 \times 25$ и $10 \times 20$. Пусть прямоугольника $1 \times 200$ нет, тогда есть все остальные. Как и выше, одновременное наличие прямоугольников $2 \times 100$ и $10 \times 20$ однозначно определяет размеры $10 \times 100$ исходного прямоугольника. Но в нём невозможно одновременно расположить прямоугольники $2 \times 100$ и $10 \times 20$.
*Пример.* Рассмотрим прямоугольник $25 \times 40$. Выложим в нём внизу слой прямоугольников $5 \times 8$, затем слой прямоугольников $4 \times 10$, затем $2 \times 20$, затем прямоугольники $1 \times 40$ до самого верха.

4) Внутри трапеции $KLMN$ ($LM \parallel KN$) выбрана точка $P$ так, что $\angle KPL = \angle MPN = 90^\circ$, $\angle LKP + \angle MNP = \angle LPM$. Докажите, что в трапецию $KLMN$ можно вписать окружность.
**Решение.** Обозначим $\alpha = \angle LKP$, $\beta = \angle MNP$. Тогда $\angle LPM = \alpha + \beta$. Пусть $Q$ – середина $KL$, $S$ – середина $MN$. Тогда $\angle QPK = \angle LKP$, $\angle NPS = \angle MNP$, $2QP = KL$, $2PS = MN$. Подсчитаем величину того из углов $\angle QPS$ (возможно, он невыпуклый), который содержит внутри себя угол $\angle LPM$:
$$\angle QPS = \angle QPL + \angle LPM + \angle MPS = (90^\circ - \alpha) + (\alpha + \beta) + (90^\circ - \beta) = 180^\circ.$$
Значит, точки $Q$, $P$, $S$ лежат на одной прямой. Тогда
$$LM + KN = 2QS = 2QP + 2PS = KL + MN.$$
Это и значит, что трапеция описанная.

5) Вася хочет покрасить клетки прямоугольника $3 \times 4$ так, чтобы незакрашенной оставалась или первая строка, или последняя строка, или два средних столбца. Сколькими способами он может это сделать?
**Ответ.** $532$ способа.
**Решение.** Пусть $X$ – множество раскрасок, при которых не закрашен верхний ряд, $Y$, – при которых не закрашен нижний ряд и $Z$, – при которых не закрашены две вертикальный полоски. Поскольку остальные клетки можно независимо или закрасить или нет, то $|X| = |Y| = 2^8$, $|Z| = 2^4$. Аналогично, что $|X \cap Z| = 2^4$, $|X \cap Z| = 2^4$, $|Y \cap Z| = 2^4$, $|X \cap Y \cap Z| = 2^2$. По формуле включений и исключений получаем ответ:
$$|X \cup Y \cup Z| = |X| + |Y| + |Z| - |X \cap Y| - |X \cap Z| - |Y \cap Z| + |X \cap Y \cap Z|$$
$$= 2^8 + 2^8 + 2^6 - 2^4 - 2^4 - 2^4 + 2^2 = 532.$$

## Вариант 4

1. Известно, что $3^3 + 4^3 + 5^3 = 6^3$. Докажите, что для любого нечётного натурального $n$ существуют $n$ различных чисел, сумма кубов которых равна кубу натурального числа.
**Решение.** Умножим обе части равенства $3^3 + 4^3 + 5^3 = 6^3$ на $2^3$, получим $6^3 + 8^3 + 10^3 = 12^3$. Заменим $6^3$ на $3^3 + 4^3 + 5^3$, тогда получим равенство $3^3 + 4^3 + 5^3 + 8^3 + 10^3 = 12^3$. Последовательно проводя эту операцию, можно получить требуемое представление для любого нечётного натурального $n$.

2. На 8 шарах написано по числу: 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9. Сколькими способами можно разложить шары в три коробки так, чтобы ни в одной коробке не было числа и его делителя?
**Ответ.** $432$.
**Решение.** Числа 5 и 7 можно положить в любую коробку, число способов $3 \cdot 3 = 9$. Числа 2, 4, 8 должны быть в разных коробках, число способов $3 \cdot 2 \cdot 1 = 6$. Таким образом, числа 2, 4, 5, 7, 8 можно разместить 54 способами. Пусть числа 2 и 3 положены в одну коробку (эта коробка уже выбрана для числа 2). Тогда для числа 9 остается два выбора, и для числа 6 – 2 выбора, всего $54 \cdot 2 \cdot 2 = 216$ способов. Пусть числа 2 и 3 положены в разные коробки, число выборов коробки для 3 равно 2. Тогда коробка для числа 6 выбирается

единственным образом, а коробка для числа 9 – любая из двух, где нет числа 3, всего $54 \cdot 2 \cdot 2 = 216$ способов, итого $216 + 216 = 432$.

3. Трёхзначное число состоит из разных цифр. Между первой и второй цифрами, а также между второй и третьей цифрами, вписали по $n$ нулей. Докажите, что существует больше одного исходного трёхзначного числа такого, что полученное $(2n + 3)$-значное число является квадратом целого числа при любых натуральных $n$.

**Ответ.** 169 и 961.

**Решение.** Найдем два таких числа. Пусть исходное число $A = \overline{abc}$. Тогда $A = a \cdot 10^{2n+2} + b \cdot 10^{n+1} + c$. Это выражение является полным квадратом $\left(\sqrt{a} \cdot 10^{n+1} + \sqrt{c}\right)^2$ при условии, что $b = 2\sqrt{ac}$. Поскольку из чисел $a$ и $c$ должен нацело извлекаться корень, для этих цифр подходят значения $0, 1, 4, 9$. Если $a = 1$ , $c = 4$, или $c = 1, a = 4,$ то $b = 4$, но цифры должны быть разными. Аналогично, если $c = 0$, то и $b$ =0. Если $a$ и $c$ принимают значения 4 и 9, то $b$ больше 10 и не может быть цифрой. Если $a = 1, c$ =9, получаем число 169. При $a = 9, c = 1$, получаем число 961.

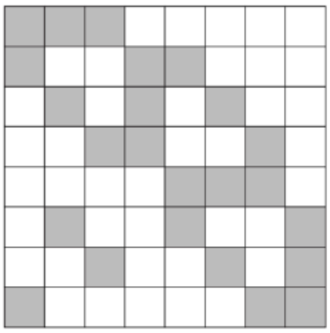
4. Точка $O$ – центр описанной окружности остроугольного треугольника $KLM$ с углом $\angle L = 30^\circ$. Луч $LO$ пересекает отрезок $KM$ в точке $Q$. Точка $P$ – середина дуги $OM$ описанной окружности треугольника $QOM$, не содержащей точку $Q$. Докажите, что точки $K$, $L$, $P$, $Q$ лежат на одной окружности.

**Решение.** По отношению к описанной окружности треугольника $KLM$ угол $\angle KLM$, равный $30^\circ$, является вписанным, следовательно, центральный угол $\angle KOM = 60^\circ$. Таким образом, треугольник $KOM$ равносторонний. Тогда четырехугольник $KOPM$ составлен из равностороннего и равнобедренного треугольников, линия $KP$ – его ось симметрии, следовательно, $KP$ – биссектриса угла $\angle OKM$. Пусть $\angle OLK = \angle LKO = \alpha$. Тогда $\angle LKP = 30^\circ + \alpha$. Далее, $\angle QOK = 2\alpha$, $\angle OQM = 60^\circ + 2\alpha$ (в обоих случаях подсчитана величина внешнего угла треугольника). Наконец, $\angle LQP = \frac{1}{2}\angle OQM = 30^\circ + \alpha = \angle LKP$. Следовательно, точки $K$, $L$, $P$, $Q$ лежат на одной окружности.

5. Какое наибольшее число клеток квадрата $8 \times 8$ можно закрасить так, чтобы центры любых четырёх закрашенных клеток не являлись вершинами прямоугольника, стороны которого параллельны краям квадрата?

**Ответ.** 24 клетки.

**Решение**. Предположим, что отмечено не менее 25 клеток. Будем говорить, что пара отмеченных клеток одной строки покрывает пару столбцов, в которых эти клетки находятся. Запрещённая четвёрка возникает, когда пара столбцов покрыта дважды. Если в одной строке отмечено $m$ клеток, а в другой $n > m + 1$ клеток, то при перекидывании одной отмеченной клетки из второй строки в первую число покрытых пар в первой увеличится на $m$, а во второй – уменьшится на $n - 1 > m$, т. е. суммарное количество пар уменьшится. Таким образом, минимум пар при данном числе отмеченных клеток достигается, когда максимальное количество клеток в строке отличается от минимального не более чем на 1. Разберём два случая.



1) Есть столбец, в котором отмечено не более двух клеток. Вычеркнем его, при этом останется семь столбцов, т. е. 21 пара. Одно из возможных распределений 23 клеток – семь строк с тремя клетками и одна строка с двумя клетками, что даёт $7 \cdot 3 + 1 = 22$ отмеченные пары. По принципу Дирихле найдётся дважды покрытая пара столбцов. Как показано выше, при другом распределении отмеченных пар будет больше.

2) В каждом столбце отмечено не менее трёх клеток. Так как $8 \cdot 3 < 25$, найдётся строка, в которой отмечено не менее четы-

рёх клеток. Пусть это первые четыре клетки нижней строки. Над ними в каждом из первых четырёх столбцов находится ещё по крайней мере по две клетки – всего не менее восьми. Они расположены в семи строках, следовательно, две из них находятся в одной строке. Вместе с соответствующими клетками нижней строки они образуют запрещённую четвёрку. Пример для 24 клеток см. на рисунке.