11 класс

Вариант 1

Задание 1

В основании четырехугольной пирамиды лежит квадрат. Могут ли боковые рёбра равняться $1, 2, 4, 8$?

Решение: Пусть сторона квадрата равна a. *Одно из соседних рёбер рядом с ребром длины 1 имеет длину 2 или 4. В первом случае рассмотрим треугольники со сторонами* $1,\ 2,\ a$ *и* $4,\ 8,\ a$. *В первом треугольнике* $1+2>a$, *во втором* $4+a>8$. *Отсюда* $a<3$ *и* $a>4$. *Во втором случае рассмотрим треугольники со сторонами* $1,\ 4,\ a$ *и* $2,\ 8,\ a$. *В первом треугольнике* $1+4>a$, *во втором* $2+a>8$. *Отсюда* $a<5$ *и* $a>6$.

Ответ: нет

Задание 2

В двух кучах лежат соответственно 100 и 105 орехов. Два бельчонка одновременно добавляют орехи в кучи: первый в первую кучу по 7 орехов, второй во вторую кучу по 6 орехов. Будет ли момент, когда в каждой куче число орехов будет делиться на 11?

Решение: Если это возможно, числа $a=100+7n$ *и* $b=105+6n$ *кратны* 11, *тогда кратно* 11 *и число* $7b-6a=135$. *Но* 135 *не делится на* 11.

Ответ: нет

Задание 3

Дана последовательность натуральных чисел $\{b_n\}$ такая, что $b_1=4$, $b_{n+1}=[\frac{3}{2}b_n]$, где $[a]$ обозначает целую часть числа a. Докажите, что в этой последовательности бесконечно много нечётных чисел.

Решение и ответ: Пусть это не так, тогда в последовательности бесконечно много чётных чисел. Пусть число x_n *чётно. Тогда его можно представить в виде* $x_n=2^m a$, *где а нечётно и* $m\geq 1$. *В таком случае* $x_{n+1}=2^{m-1}(2a+a)=2^{m-1}a_1$, *где число* a_1 *нечётно. Если* x_n *кратно* 2^m, *то* x_{n+1} *кратно только* 2^{m-1}, x_{n+2} *кратно только* 2^{m-2}, *и т.д., а наивысшая степень* 2, *на которую делится* x_{n+m-1}, *равна* 1. *Следовательно, число* x_{n+m} *нечётно. Таким образом, после каждого чётного числа обязательно встретится нечётное, но по предположению чётных чисел в последовательности бесконечно много, значит, и нечётных бесконечно много.*

Задание 4

Окружность разделена 48 точками на равные дуги, и каждые две точки соединены отрезками. Какое наименьшее количество цветов необходимо для того, чтобы раскрасить все отрезки, соблюдая условие: любые два отрезка, имеющие общую точку, должны быть покрашены различно? 5) Найдите все функции $f(t)$, при каждом действительном t удовлетворяющие равенству $f(t+1)+(t+3/2)f(-t)=1$.

Решение: Покажем, что требуется не меньше 48 цветов. Возьмём вершину A, и рассмотрим стороны и диагонали, выходящие из A, их 47, *и они имеют общую точку* A. *Пусть стороны, содержащие A – это* AB *и* AC. *Сторона* BC *пересекает все отрезки, выходящие из A. Таким образом, требуется не меньше* $47+1=48$ *цветов. Докажем, что 48 цветов достаточно. Для этого достаточно показать, что все отрезки разбиваются на 48 семейств, причём отрезки одного семейства параллельны (а отрезки разных семейств не параллельны). Покажем, что эти семейства можно задать выше перечисленными* 48 *отрезками (стороны и диагонали, выходящие из* A, *и сторона* BC). *Надо доказать, что каждый из остальных отрезков параллелен какому-нибудь из рассмотренных отрезков. Возьмем на окружности отрезок* MN. *Если он параллелен* BC, *то он принадлежит к его семейству. Если он не параллелен* BC, *то проведем через точку* A *прямую* l *параллельно* MN. *Прямая* l *не может быть касательной, так как касательная параллельна* BC, *и было бы* $\|MN\|BC$. *Значит,* l *пересечет окружность в точке* K.

Так как A и M вершины 48-угольника, то дуга AM (меньшая) содержит целое число равных дуг, на которые окружность разбивается вершинами 48-угольника. Так как $l\,\|\,MN$, *то и меньшая дуга* NK *содержит столько же дуг. Но это означает, что K – вершина 48-угольника, значит, отрезок* MN *параллелен* AK, *но AK – один из* 47 *отрезков, выходящих из* A, *и задающих семейства. Значит, любой отрезок, соединяющий точки, принадлежит одному из 48 семейств. Покрасим отрезки одного семейства в один цвет, 48 цветов достаточно.*

Ответ: 48

Задание 5

Найдите все функции f(t), при каждом действительном t удовлетворяющие равенству f(t+1)+(t+3/2)f(-t)=1.

Решение: Подставим $t_1=-\frac{1}{2}+u$: $f\left(\frac{1}{2}+u\right)+(u+1)f\left(\frac{1}{2}-u\right)=1.$

Далее подставим $t_2=-\frac{1}{2}-u$: $f\left(\frac{1}{2}-u\right)+(1-u)f\left(\frac{1}{2}+u\right)=1.$

Обозначим $f(1/2+u)=x, f(1/2-u)=y$. *Получили систему:*

$$\begin{cases}x+(1+u)y=1\\(1-u)x+y=1\end{cases}.$$

Домножая второе уравнение на $(1+u)$, *и вычитая из него первое уравнение, получаем* $x=-1/u$, *то есть* $f(1/2+u)=-1/u$. *Сделаем сдвиг на* $\frac{1}{2}$: $f(u)=\frac{-1}{u-\frac{1}{2}}=\frac{2}{1-2u}$.

Ответ: $f(t)=\frac{2}{1-2t}$

11 класс

Вариант 2

Задание 1

Вне плоскости ромба $ABCD$ выбрана точка E. Могут ли длины отрезков EA, EB, EC, ED равняться (в некотором порядке) числам $1, 3, 6, 11$?

Решение: Пусть сторона ромба равна a. $EABCD$ – четырехугольная пирамида с вершиной E. Одно из соседних рёбер рядом с ребром длины 1 имеет длину 3 или 6. В первом случае рассмотрим треугольники со сторонами $1,\ 3,\ a$ *и* $6,\ 11,\ a$. *В первом треугольнике* $1+3>a$, *во втором* $6+a>11$. *Отсюда* $a<4$ *и* $a>5$. *Во втором случае рассмотрим треугольники со сторонами* $1,\ 6,\ a$ *и* $3,\ 11,\ a$. *В первом треугольнике* $1+6>a$, *во втором* $3+a>11$. *Отсюда* $a<7$ *и* $a>8$.

Ответ: нет

Задание 2

К числителю и знаменателю дроби $\frac{2016}{2017}$ одновременно прибавляют по числу: к числителю прибавляют 4, а к знаменателю 3. Получится ли когда-нибудь дробь, сократимая на 13?

Решение: Если дробь $\frac{2016+4n}{2017+3n}$ *сократима на* 13, *числа* $a=2016+4n$ *и* $b=2017+3n$ *кратны* 13, *тогда кратно* 13 *и число* $4b-3a=2020$. *Но* 2020 *не делится на* 13.

Ответ: нет

Задание 3

В последовательности натуральных чисел $\{a_n\}$ $a_1 = 9$, $a_{n+1} = [a_n + \frac{a_n}{2}]$, где $[b]$ обозначает целую часть числа b. Докажите, что в этой последовательности бесконечно много чётных чисел.

Решение и ответ: Пусть это не так, тогда в последовательности бесконечно много нечётных чисел. Пусть число x_n *нечётно. Тогда его можно представить в виде* $x_n = 2^m a + 1$, *где* a *нечётно и* $m \geq 1$. *В таком случае* $x_{n+1} = 2^{m-1}(2a+a)+1 = 2^{m-1}a_1 + 1$, *где число* a_1 *нечётно, следовательно,* x_{n+1} *нечётно. Тогда* $x_{n+k} = 2^{m-k}(2a_{k-1} + a_{k-1}) + 1 = 2^{m-k}a_k + 1$, *и это тоже нечётное число. Но степень, с которой входит множитель* 2, *уменьшается, и число* $x_{n+m} = (2a_{m-1} + a_{m-1}) + 1$ *чётно. Таким образом, после каждого нечётного числа обязательно встретится чётное, но по предположению нечётных чисел в последовательности бесконечно много, значит, и чётных бесконечно много.*

Задание 4

Бельчонок нарисовал правильный 100-угольник и хочет раскрасить каждую сторону и каждую диагональ каким-либо цветом так, чтобы любые два отрезка, имеющие общую точку, были покрашены в разный цвет. Какое наименьшее количество цветов потребуется для раскраски?

Решение: Покажем, что требуется не меньше 100 цветов. Возьмём вершину A, *и рассмотрим стороны и диагонали, выходящие из* A, *их* 99, *и они имеют общую точку* A. *Пусть стороны, содержащие* A, *– это* AB *и* AC. *Сторона* BC *пересекает все отрезки, выходящие из* A. *Таким образом, требуется не меньше* $99 + 1 = 100$ *цветов. Докажем, что достаточно 100 цветов. Для этого достаточно показать, что все отрезки разбиваются на 100 семейств, причём отрезки одного семейства параллельны (а отрезки разных семейств не параллельны). Покажем, что эти семейства можно задать выше перечисленными* 100 *отрезками (стороны и диагонали, выходящие из* A, *и сторона* BC. *Надо доказать, что каждый из остальных отрезков параллелен какому-нибудь из рассмотренных отрезков. Опишем около 100-угольника окружность, возьмем отрезок* MN. *Если он параллелен* BC, *то он принадлежит к его семейству. Если он не параллелен* BC, *то проведем через точку* A *прямую* l *параллельно* MN. *Прямая* l *не может быть касательной, так как касательная параллельна* BC, *и было бы* $l \,||\, MN \,||\, BC$. *Значит,* l *пересечет окружность в точке* K. *Так как* A *и* M *вершины 100-угольника, то дуга* AM *(меньшая) содержит целое число равных дуг, на которые окружность разбивается вершинами 100-угольника. Так как* $l \,||\, MN$, *то и меньшая дуга* NK *содержит столько же дуг. Но это означает, что* K *– вершина 100-угольника, значит, отрезок* MN *параллелен* AK, *но это один из* 99 *отрезков, выходящих из* A. *Значит, любой отрезок, соединяющий вершины, принадлежит одному из указанных семейств. Всего существует* 100 *семейств отрезков, покрасим отрезки одного семейства в один цвет, 100 цветов достаточно.*

Ответ: 100

Задание 5

Найдите все функции $f(x)$, при каждом действительном x удовлетворяющие равенству $2f(x+2) + f(-1-x) = (x+2)^2$.

Решение: Подставим $x_1 = -\frac{3}{2} + u$: $2f\left(\frac{1}{2} + u\right) + f\left(\frac{1}{2} - u\right) = \left(\frac{1}{2} + u\right)^2$.

Далее подставим $x_2 = -\frac{3}{2} - u$: $2f\left(\frac{1}{2} - u\right) + f\left(\frac{1}{2} + u\right) = \left(\frac{1}{2} - u\right)^2$.

Обозначим $f(1/2 + u) = z, f(1/2 - u) = y$. *Получили систему:*

$$\begin{cases} 2z + y = \left(\dfrac{1}{2} + u\right)^2 \\ z + 2y = \left(\dfrac{1}{2} - u\right)^2 \end{cases}.$$

Домножая первое уравнение на 2, *и вычитая из него второе уравнение, получаем* $z = \frac{u^2+3u+1/4}{3}$, *то есть* $f(1/2 + u) = \frac{u^2+3u+1/4}{3}$.

Сделаем сдвиг на $\frac{1}{2}$: $f(u) = \frac{(u-1/2)^2+3(u-1/2)+1/4}{3} = \frac{u^2+2u-1}{3}$.

Ответ: $f(x) = \frac{x^2+2x-1}{3}$