

## 9 класс

### Вариант 1

*Работа рассчитана на 240 минут.*

**1. Решение должно быть полным и обоснованным. (10 баллов)**

На доске записано число 123456789. Разрешается брать любые две цифры одинаковой чётности и заменять каждую из них на среднее арифметическое. Можно ли такими операциями когда-нибудь получить на доске число, большее 800000000?

**2. Решение должно быть полным и обоснованным. (10 баллов)**

Сколькими способами можно расставить в ряд числа 1, 2, 3, 4, 5, 6 так, что второе число отличается от первого, третье число – от второго, ..., шестое число – от пятого на целое число процентов?

**3. Решение должно быть полным и обоснованным. (10 баллов)**

Каждый из нескольких орехов стоит одно и то же целое число фунтиков. Известно, что 9 таких орехов стоят меньше  $n$  динаров ( $n$  – целое число), а 10 орехов стоят больше, чем  $n + 1$  динаров. Найдите все значения  $n$ , при которых можно однозначно определить стоимость одного ореха, если в одном динаре 100 фунтиков.

**4. Решение должно быть полным и обоснованным. (10 баллов)**

Дана трапеция  $ABCD$ , в которой  $AB = BC = CD$  и  $P$  – основание перпендикуляра, опущенного из точки  $C$  на основание  $AD$ . Докажите, что если из точки  $P$  опустить перпендикуляр на диагональ  $AC$ , то он проходит через середину диагонали  $BD$ .

**5. Решение должно быть полным и обоснованным. (10 баллов)**

Известно, что натуральные числа  $a$ ,  $b$ ,  $c$  удовлетворяют соотношению  $a + b = ab - bc$ , а  $c + 1$  – квадрат простого числа. Докажите, что хотя бы одно из чисел  $a + b$  или  $ab$  является квадратом натурального числа.

## 9 класс

### Вариант 2

*Работа рассчитана на 240 минут.*

**1. Решение должно быть полным и обоснованным. (10 баллов)**

На доске записано число 2016. Разрешается прибавлять к числу или вычитать из него произведение любых его двух цифр. Можно ли такими операциями когда-нибудь получить на доске число 2015?

**2. Решение должно быть полным и обоснованным. (10 баллов)**

Найдите количество девятизначных чисел, для записи которых используются цифры 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9 (цифры в числе не повторяются), таких, что цифра 1 стоит после цифры 6, а цифры 1, 2, 3, 4, 5 располагаются в порядке возрастания (не обязательно подряд).

**3. Решение должно быть полным и обоснованным. (10 баллов)**

Как-то в лесу Сибирского федерального университета бельчата нашли несколько орехов общей массой 100 г. Оказалось, что три самых лёгких ореха весят 25 г, а три самых тяжёлых – 35 г. Сколько орехов нашли бельчата в лесу, если все орехи имеют различный вес и необязательно весят целое число граммов?

**4. Решение должно быть полным и обоснованным. (10 баллов)**

$ABC$  – прямоугольный треугольник с гипотенузой  $AC$ ,  $O$  – точка пересечения биссектрис  $AK$  и  $CL$ . Перпендикулярно прямой  $AK$  провели прямую, проходящую через точку  $L$ , которая пересекает прямую, проходящую через  $K$  и перпендикулярную  $CL$ , в точке  $P$ . Докажите, что середина отрезка  $OP$  лежит на гипотенузе  $AC$ .

**5. Решение должно быть полным и обоснованным. (10 баллов)**

Целые числа  $a$ ,  $b$  и  $c$  таковы, что  $c^2 - a^2 - b^2 = 2(a - b)(c - a + b)$ . Докажите, что число  $2ab$  является точным квадратом.