9 класс

Вариант 1

1) Уравнение $kx + m = 0$ не имеет корней тогда и только тогда, когда $k = 0$, $m \neq 0$. Тогда, из чисел a, b, c, d, e ровно три равно нулю и ровно три не равно нулю, что невозможно. Значит, Вася не прав.

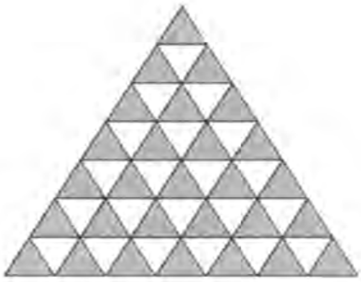
2) 1. Пусть на острове x жителей, каждый из них дал $(x-1)$ ответ, поэтому $x(x-1)=26+30$, то есть $x=8$.

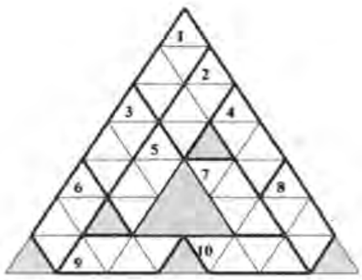
2. Пусть на острове y рыцарей, тогда лжецов – $(8-y)$. Ответ: «рыцарь» каждый из рыцарей дал $(y-1)$ раз, а каждый из лжецов – $(7-y)$ раз. Тогда $y(y-1)+(8-y)(7-y)=26 \Leftrightarrow$ $y^2-8y+15=0 \Leftrightarrow y=3$ или $y=5$. Оба полученных ответа удовлетворяют условию (в обоих случаях получается 30 ответов «лжец»).

Возможно также решение методом полного перебора. Для того, чтобы существенно упростить перебор, можно заметить, что число 30 должно делиться как на удвоенное количество рыцарей, так и на удвоенное количество лжецов. Действительно, если рыцарей – y, а лжецов – z, то $yz+zy=30$, то есть $2yz=30$.

Ответ: 3 или 5.

3) Раскрасим данный треугольник в «шахматном» порядке так, как это сделано на рисунке. Поскольку каждый вырезанный параллелограмм состоит из двух белых единичных треугольничков, а их всего 21, то число всех вырезанных параллелограммов не превышает 10.

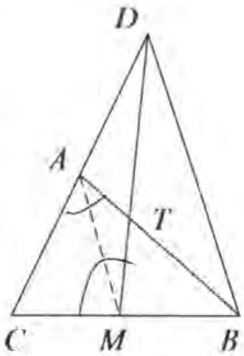




На рисунке показано, как вырезать ровно 10 нужных параллелограммов.

Ответ: 10.

4) Отложим на продолжении отрезке CA за точку A точку D так, что $CA=AD$. Тогда для ΔBCD отрезки DM и BA являются медианами. Они пересекаются в одной точке T и делятся ею в отношении $2:1$, считая от вершины треугольника. Значит, точки T и N совпадают. Тогда $\angle DAB=180^\circ-\angle CAB=180^\circ-\angle CMN=\angle DMB$. Поэтому четырехугольник $BMAD$ – вписанный. Поскольку $AM \parallel BD$, как средняя линия ΔBCD, то $\angle CDB=\angle CAM=\angle CBD$. Отсюда следует, что $CD=CB$. Поэтому $\frac{AC}{BC}=\frac{\frac{1}{2}DC}{DC}=\frac{1}{2}$.



Ответ: $\frac{1}{2}$.

5) *Первое решение.* Пусть x и y – целые числа. Рассмотрим числа $x^3 - 30y$ и x. Заметим, что $x^3 - 30y - x = x(x-1)(x+1) - 30y$. Так как произведение трёх последовательных чисел делится на 3 и 30 делится на 3, то и разность $x^3 - 30y - x$ делится на 3. Это означает, что числа $x^3 - 30y$ и x имеют одинаковые остатки при делении на 3.

Так как остатков при делении на 3 ровно три, а чисел на доске изначально два, то по крайней мере одного остатка от деления на 3 на доске нет. Каждое дописывание числа вида $x^3 - 30y$ добавляет на доску число с таким же остатком при делении на 3, как и у числа x. Поэтому на доске не могут появиться числа с отсутствующим остатком. Итак, на доске не могут появиться одновременно даже числа 2015, 2016, 2017, поскольку они имеют остатки 0, 1 и 2 при делении на 3.

Второе решение. Рассмотрим последние цифры чисел, которые дописываются на доску. Вычитание числа $30y$ не изменяет последнюю цифру числа, а при возведении в куб последние цифры чисел либо повторяются (для цифр $0, 1, 4, 5, 6, 9$), либо разбиваются на пары: $(2; 8)$ и $(3; 7)$. Таким образом, два исходных числа могут образовать не более четырёх различных последних цифр у множества чисел, записанных на доске.

Ответ: нет, не могут.

9 класс

Вариант 2

1) Например, $y = x + 10$, $y = 2x + 9$, $y = 3x + 8$, $y = 4x + 7$, $y = 5x + 6$, тогда график каждой функции пройдет через точку $(1, 11)$.

Или $y = x + 2$, $y = 3x + 4$, $y = 5x + 6$, $y = 7x + 8$, $y = 9x + 10$, тогда график каждой функции пройдет через точку $(-1, 1)$.

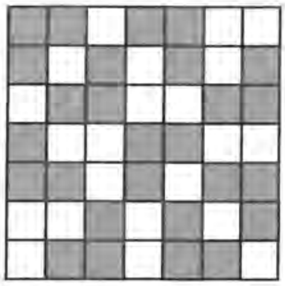
Возможны и другие примеры.

Ответ: Вася прав.

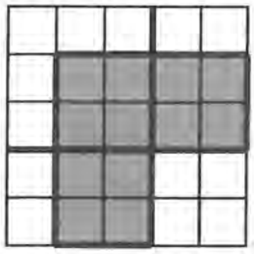
2) Пусть крайний слева – лжец. Тогда и все остальные, кроме, возможно, крайнего справа – лжецы, то есть лжецов 2014 или 2015. То же будет, если лжец – крайний справа. Если же оба крайних – правдивые, то все, кто между ними, говорят правду, и лжецов 0.

Ответ: 2015, 2014 или 0.

3) Пример для 9 уголков изображен на рисунке.



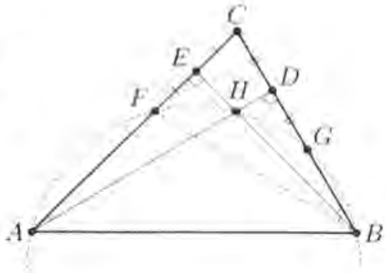
Докажем, что большее количество уголков разместить не удастся. Предположим, что мы разместили 10 уголков так, чтобы они удовлетворяли условию. Рассмотрим каждый из них. Покрасим отрезки, как это показано на рисунке – здесь сторону маленького квадрата считаем равной $\frac{1}{2}$, то есть мы единичные квадраты разбили пополам на 4 меньших равных квадратика.



Для каждого из уголков общая длина окрашенных отрезков составляет 11, поэтому их общая длина составляет 110. При этом, как легко понять, у одной пары уголков нет общих окрашенных отрезков, но отрезки могут выходить за пределы квадрата (а именно те, что идут из средних сторон).

Теперь рассмотрим одну из сторон большого квадрата. Покрасим на ней все отрезки, которые не принадлежат сторонам уголков – их общая длина как минимум 2, что нетрудно понять из того, что уголки не могут касаться сторонами, а их наибольшая сторона равна 2; очевидно, что они не были окрашены ранее. Также сотрем все отрезки, которые выходят из середин двухклеточного сторон уголков и выходят за пределы квадрата, причем один конец которых лежит на этой стороне квадрата – поскольку таких уголков для данной стороны не более 2, то общая длина стертых отрезков будет не более 1. Таким образом, суммарная длина отрезков выросла не менее, чем на 1. Поскольку есть всего 4 стороны квадрата, то она выросла минимум на 4 и стала минимум 114. Но все отрезки теперь идут по линиям сетки квадрата, не совпадают и не выходят за его пределы. Но в таком случае их длина не может быть больше суммарной длины всех линий сетки квадрата, в частности $2 \cdot 7 \cdot 8 = 112 < 114$. Противоречие.

Ответ: 9.



4) Пусть $\angle HBK = \alpha$. Тогда $\angle KAH = \angle HBK = \alpha$ (вписанные углы, опирающиеся на одну и ту же дугу). Из прямоугольного треугольника ADC: $\angle C = 90^\circ - \alpha$, а из прямоугольного треугольника ECB: $\angle EBC = 90^\circ - \angle C = \alpha$. Таким образом, BE – высота и биссектриса треугольника KBC,

следовательно, этот треугольник равнобедренный и BE является его медианой, то есть $KE = EC$. Аналогично доказывается, что $CD = DL$. Значит, ED – средняя линия треугольника KCL. Поэтому $KL = 2DE = 8$ см.

Ответ: 10 см.

5) Предположим, такое n существует. При увеличении на $n\%$ число умножается на $1 + n/100$, а при уменьшении число умножается на $1 - n/100$. Если число повторилось после k увеличений и l уменьшений, то $(100 + n)^k(100 - n)^l = 100^{k+l}$. Так как правая часть чётна, то и левая часть должна быть чётна, значит, n чётно. Так как правая часть кратна 5, то n кратно 5, то есть $n = 10m$. Подставив и сократив, получим $(10 + m)^k(10 - m)^l = 10^{k+l}$. Аналогично докажем, что m кратно 10, поэтому n делится на 100. Но по условию $n < 100$.

Ответ: не существует.