8 класс

Вариант 1

1) Единственное четырехзначное число, у которого цифры идут в порядке возрастания с первой цифрой 6 – это 6789, но оно не делится на 9. С первой цифрой 5 рассмотрим числа 5678 и 5789, которые имеют соответственно наименьшее и наибольшее суммы цифр. Как легко понять, между ними существует единственное число с суммой цифр, которая делится на 9.

Ответ: 5679.

2) Все четыре числа: делимое, делитель, неполное частное и остаток, по утверждению Васи, нечетные. Но делимое есть сумма произведения неполного частного на делитель и остатка. Если последние три числа нечетные, то делимое должно быть четным, т.е. Вася ошибся.

Ответ: Вася не прав.

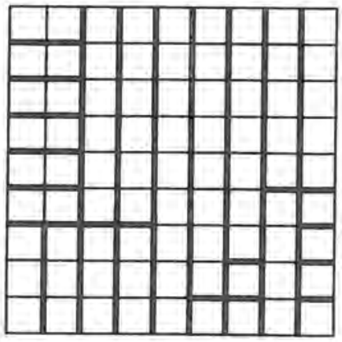
3) Средняя скорость V_0 находится как среднее гармоническое: $V_0 = \frac{2}{\frac{1}{V_1}+\frac{1}{V_2}}$, то есть $6 = \frac{2}{\frac{1}{4}+\frac{1}{V_2}}$. Отсюда находим $V_2 = 12$ км/час.

Ответ: 12 км/час.

4) Отложим на стороне BA отрезок AE, равный AC. Тогда в треугольнике ACE углы при основании равны 80°. Пусть CD – биссектриса $\angle ACB$, тогда $\angle BDC = 180^\circ - (40^\circ + 60^\circ) = 80^\circ$. В треугольнике DEC равны два угла, поэтому он равнобедренный. Тогда $\angle DCE = 20^\circ$, поэтому $\angle BCE = 60^\circ - 20^\circ = 40^\circ$. Значит, треугольник BCE также равнобедренный, следовательно, $CE = DE = BE = AB - AE = AB - AC = 1$.

Ответ: 1.

5) Предположим, что при любом выборе числа k Петя не может получить прямоугольник площади 12 или больше. Это означает, что среди полос максимум по одной полоске длины 9, 8, 7, 6; не более двух полосок длины 5 и 4; не более трех полосок длины 3, не более пяти полосок длины 2 и не более одиннадцати единичных квадратиков. Общая площадь



$$9 + 8 + 7 + 6 + 2 \cdot 5 + 2 \cdot 4 + 3 \cdot 3 + 5 \cdot 2 + 11 = 78 < 81.$$

Таким образом, по крайней мере одного типа прямоугольников $1 \times k$ хватит для построения прямоугольника площади 12.

Теперь покажем разрезания, при котором значение 12 – наибольшее возможное. На рисунке показано разрезания квадрата 9×9 на такие прямоугольники:

$$1 \cdot 9 + 1 \cdot 8 + 1 \cdot 7 + 2 \cdot 6 + 2 \cdot 5 + 1 \cdot 4 + 4 \cdot 3 + 6 \cdot 2 + 7 \cdot 1 = 81.$$

Ответ: 12.

8 класс

Вариант 2

1) Так как $1000 = 53 \cdot 23$, то каждое из чисел в своем разложении на простые множители может содержать только двойки и пятёрки. Заметим, что оба этих множителя не могут присутствовать в разложении одного числа,

иначе оно будет делиться на 10. Следовательно, одно из чисел равно 53, а другое – 23. Тогда их сумма равна: $53 + 23 = 125 + 8 = 133$.

Ответ: 133.

2) *Первый способ.* Чисел нечетное число, поэтому их нельзя разбить на пары.

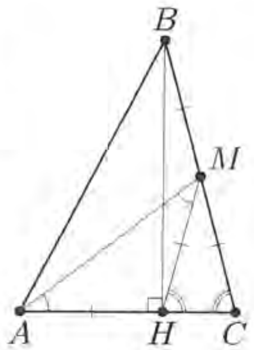
Второй способ. Данные числа можно разделить на 3 группы: кратные 3, дающие остаток 1 при делении на 3 и дающие остаток 2 при делении на 3. Числа из любой пары всегда относятся к одной группе, поэтому мы должны разбить на пары каждую группу. Но количество чисел в первой группе (кратных 3) нечетно: оно равно 671. Поэтому такое разбиение невозможно.

Ответ: Вася не прав.

3) Пусть x человек приходило на все три лекции. Подсчитаем, сколько было учащихся на всех трех лекциях вместе. 90 учащихся пришло только на одну лекцию, 120 учащихся приходило дважды, $3x$ учащихся приходили трижды. Так как всего на лекции пришло $3 \cdot 100 = 300$ учащихся, то составляем и решаем уравнение: $90 + 120 + 3x = 300$, откуда $x = 30$.

Ответ: 30 учащихся.

4) Проведём отрезок HM. Он является медианой в прямоугольном треугольнике BHC, поэтому равен половине BC. Пусть $\angle MAC = \alpha$, тогда $\angle MCA = 2\alpha$. Так как $MC = MH$, то треугольник HMC равнобедренный, следовательно, $\angle MHC = \angle MCH = 2\alpha$. Так как угол MHC – внешний для треугольнике AHM, то $\angle AMH = \angle MHC - \angle MAH = \alpha$. Таким образом, треугольник AHM равнобедренный, то есть $AH = HM = \frac{BC}{2} = 5$ см.



Ответ: 5 см.

5) *Первый способ.* Прежде всего, заметим, что после каждого хода уменьшается общее количество конфет. Следовательно, рано или поздно игра должна закончиться победой одного из игроков. Изначально в белой коробке конфет больше, и разность количества конфет в белой и красной коробках равна 1. Мальчики своими ходами не могут сделать так, что бы количество конфет в коробках стало равным.

Далее рассмотрим два случая:

Первый случай. В процессе игры мальчики делают ходы так, что количество конфет в белой коробке всегда больше количества конфет в красной коробке. Тогда после каждого хода разность между количеством конфет в коробках изменяется на 2. Поэтому после каждого хода первого игрока остаток от деления этой разности на 4 будет равен 3. Т. е. после некоторого очередного хода первого игрока в белой коробке будет 3 конфеты, в красной не будет ни одной и второй игрок может всегда сделать ход (например, съесть 2 конфеты). Следовательно, проиграть он не может и проигрывает всегда первый игрок.

Второй случай. В процессу игры мальчики делают ходы так, что количество конфет в красной коробке становится больше количества конфет в белой, причем такое может случиться только после хода первого и в случае, когда разность между количеством конфет в коробках будет равна 1. Вернуть ситуацию обратно может толь второй игрок. Если смена лидера (назовем «лидером» коробку с большим количеством конфет) произойдет четное число раз, то мы придем к ситуации, Когда после хода второго в красной коробке будет 1 конфета, в белой – 2; если смена лидера произойдет нечетное количество раз, то мы придем к ситуации, когда после хода первого в красной коробке будет 0 конфет, в белой – 3. В каждом из случаев второй проиграть не может и проигрывает всегда первый игрок.

Второй способ. Заметим, что всего можно сделать четное число (12) ходов, уменьшающих число конфет на 2. Так как конфет в сумме 25, то пока их не меньше трех, найдется коробка, в которой конфет не меньше двух, оттуда можно будет забрать 2. Также заметим, что перекладываний из коробки в коробку можно сделать тоже четное число ходов: вначале в красной коробке четное число конфет, значит, если было сделано нечетное число перекладываний и какое-то количество изъятий двух конфет, в красной коробке осталось нечетное число конфет и можно переложить еще хотя бы 1 раз. Таким образом, ходов обоих типов может быть сделано четное число, поэтому выигрывает второй независимо от сделанных игроками ходов.